

MOYENNABILITÉ À L'INFINI ET EXACTITUDE D'UN GROUPOÏDE ÉTALE

IVAN LASSAGNE

RÉSUMÉ. Soit \mathcal{G} un groupoïde étale localement compact, σ -compact et séparé dont l'espace des unités est noté X . On donne la définition de la moyennabilité à l'infini pour un tel groupoïde en généralisant celle d'un groupe discret et on étudie dans certains cas la relation entre l'exactitude de la C^* -algèbre réduite du groupoïde $C_r^*(\mathcal{G})$ et la moyennabilité à l'infini de \mathcal{G} .

ABSTRACT. Let \mathcal{G} be a locally compact, σ -compact and Hausdorff étale groupoid and X its space of units. We give a definition of amenability at infinity of such groupoid. We study in some cases the relation between the exactness of the reduced C^* -algebra $C_r^*(\mathcal{G})$ and the amenability at infinity of \mathcal{G} .

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Préliminaires	5
2.1. Groupoïdes topologiques	5
2.2. Algèbres associées à un groupoïde	8
2.3. Modules de Hilbert et représentation régulière	11
3. Groupoïde moyennable à l'infini et espace universel	12
3.1. Quelques propriétés des C^* -algèbres commutatives	14
3.2. \mathcal{G} -algèbre	15
3.3. Espace $\beta_X \mathcal{G}$ et propriété universelle	19
3.4. Espace de mesure	23
3.5. Existence d'une section continue	27
3.6. Moyennabilité	29
3.7. Groupoïde étale exact	33
4. C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ et approximation de la représentation régulière	35
4.1. Approximation de l'unité et opérateurs de rangs finis	36
4.2. Représentation régulière et opérateurs de rang fini	40
4.3. $C(X)$ -nucléarité et exactitude	43
4.4. Etude de E_n : projection et application localisante	45
4.5. Champ de formes vectorielles	47
4.6. Approximation par factorisation	52

Key words and phrases. groupoids, C^* -algebras, amenability, exactness.

4.7. Moyennabilité	58
Références	63

1. INTRODUCTION

Un groupe est dit moyennable si l'ensemble de ses parties admet une mesure finie qui est finiment additive et invariante par translation. Il existe de nombreuses définitions de la moyennabilité pour les groupes localement compacts en termes de moyennes invariantes sur certains espaces, en termes de point fixes, en termes de représentations, en termes de suite de Følner etc.... On trouve de nombreuses références littéraires sur la moyennabilité des groupes parmi lesquels [Pie84], [Pat88], [Run02], [BdlHV08] ou encore [ADR00a] pour la généralisation de la moyennabilité au cas des groupoïdes. On utilise la définition de moyennabilité d'un groupe localement compact en termes de moyenne invariante : pour tout groupe G localement compact, on appelle moyenne sur G une forme linéaire $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire vérifiant $m(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ et de norme un.

Définition 1.1. *Un groupe G localement compact est moyennable s'il existe une moyenne sur G , notée $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$, invariante à gauche c'est-à-dire vérifiant pour tout g dans G et toute fonction f dans $L^\infty(G)$, on a $m(g.f) = m(f)$ et telle que $m(1_{L^\infty(G)}) = 1$.*

De nombreux travaux sur les groupes portent sur la relation entre la moyennabilité d'un groupe localement compact G et la nucléarité des C^* -algèbres pleine $C^*(G)$ et réduite $C_r^*(G)$ associées au groupe G . On rappelle qu'une C^* -algèbre A est nucléaire si pour toute C^* -algèbre B , on a l'identification $A \otimes_{\min} B = A \otimes_{\max} B$. Dans le cas d'un groupe discret G , Lance prouve dans [Lan73] l'équivalence entre la moyennabilité de G et la nucléarité de $C_r^*(G)$.

Dans [Eff75], l'auteur donne une définition plus faible de la moyennabilité pour un groupe localement compact et appelée moyennabilité intérieure : on donne la définition de moyennabilité intérieure des articles [BdlH86], [Pat88], [LP91] ou encore [Sta06] qui diffère de celle de [Eff75]

Définition 1.2. *Un groupe localement compact G est dit intérieurement moyennable s'il existe une moyenne $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ sur G qui soit invariante par automorphismes intérieurs, c'est-à-dire telle que pour tout g dans G et tout f dans $L^\infty(G)$, la moyenne m vérifie $m(gfg^{-1}) = m(f)$.*

Lau et Paterson prouvent dans [LP91] que tout groupe G localement compact et intérieurement moyennable, tel que la C^* -algèbre $C_r^*(G)$ est nucléaire, est alors un groupe moyennable.

Dans l'article [AD02], l'auteur étudie le cas de groupe de transformation (X, G) c'est-à-dire le cas d'un espace localement compact muni d'une action d'un groupe localement compact. Un des objectifs principaux de l'article [AD02] est la généralisation du résultat de Lau et Paterson énoncé auparavant au cas des groupes de transformation. Pour un groupe de transformation (X, G) , la notion de moyennabilité utilisée est celle de moyennabilité (topologique) du groupoïde $X \rtimes G$: Anantharaman-Delaroche donne la définition

de moyennabilité du groupe de transformation (X, G) en termes de moyenne continue invariante approchée de la manière suivante

Définition 1.3. [AD02] *On dit que le groupe de transformation (X, G) est moyennable s'il existe une suite $(m_i)_{i \in I}$ d'applications continues $x \mapsto m_i^x$ de X dans l'espace $\text{Prob}(G)$ telles que*

$$\lim_i \|s.m_i^x - m_i^{sx}\|_1 = 0$$

uniformément sur tout sous espace compact de $X \times G$. Une telle suite $(m_i)_{i \in I}$ est appelée moyenne continue invariante approchée.

En adaptant les définitions de groupoïdes moyennables de [ADR00b], Anantharaman-Delaroche donne une caractérisation de la moyennabilité d'un groupe de transformations en termes de suite de fonctions. La notion de groupe intérieurement moyennable n'admet à priori pas de généralisation pour les groupes de transformation. Anantharaman-Delaroche remplace cette condition par une notion plus faible qui est la propriété (W) pour un groupe de transformation (X, G) exprimée à l'aide de fonctions de type positif sur le $G \times G$ -espace $X \times X$:

Définition 1.4. *Soient G un groupe localement compact et séparé et X un G -espace localement compact et séparé. Le groupe de transformation (X, G) a la propriété (W) si pour tout sous espace compact K de $X \times G$ et pour tout réel ε strictement positif, il existe une fonction h continue, bornée de type positif, à support π -propre sur $(X \times G) \times (X \times G)$ telle que $|h(x, t, x, t) - 1| \leq \varepsilon$, pour tout (x, t) dans K .*

Tout groupe de transformation (X, G) moyennable possède la propriété (W). On dit qu'un groupe possède la propriété (W) si le groupe de transformation $(\{.\}, G)$ possède la propriété (W), où le groupe G agit trivialement sur l'espace $\{p\}$ constitué d'un seul point. Dans ce cas, il s'agit d'une notion plus faible que la moyennabilité intérieure d'un groupe localement compact. On montre assez facilement que tout groupe discret possède la propriété (W) ou encore que si un groupe G possède la propriété (W), alors tout groupe de transformation (X, G) possède aussi la propriété (W). Anantharaman-Delaroche prouve le théorème suivant qui généralise celui de Lau et Paterson [LP91]

Théorème 1.5. [AD02] *Soit (X, G) un groupe de transformation avec X un G -espace localement compact et G un groupe localement compact et séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (a) (X, G) est moyennable
- (b) $C_r^*(X \rtimes G)$ est nucléaire et (X, G) a la propriété (W).

Comme les groupes discrets possèdent la propriété (W), on retrouve l'équivalence entre la moyennabilité du groupe G et la nucléarité de $C_r^*(G)$ démontré dans [Lan73]. De même, dans le cas d'un groupe de transformation (X, G) avec G un groupe discret, le théorème de Anantharaman-Delaroche prouve qu'il y a équivalence entre la moyennabilité du groupe de transformation (X, G) et la nucléarité de $C_r^*(X \rtimes G)$. Le cas des groupes discrets attire l'attention notamment pour les liens avec la conjecture de Novikov qui est le sujet de nombreux travaux comme [Hig00], [Yu00] ou [HR00]. Dans ces articles, une propriété importante pour un groupe discret est la moyennabilité à l'infini :

Définition 1.6. *Un groupe localement compact G est moyennable à l'infini s'il existe un G -espace compact X pour lequel le groupe de transformation est moyennable.*

Pour les groupes discrets on a une caractérisation des groupes moyennables à l'infini. On note βG le compactifié de Stone-Cëch de G , qui coïncide avec le spectre de $C_b(G)$, algèbre des fonctions continues et bornées sur G . Dans l'article [Oza00], l'auteur prouve le théorème suivant

Théorème 1.7 ([Oza00]). *Soit G un groupe discret. Le groupe G est exact si et seulement si le groupe G agit moyennablement sur l'espace βG .*

Pour démontrer ce théorème, Ozawa utilise un résultat de [HR00] qui dit que l'action d'un groupe discret G par translation à gauche sur son compactifié de Stone-Cëch est moyennable si et seulement si la C^* -algèbre de Roe est nucléaire. La C^* -algèbre $C_r^*(G)$ étant une sous C^* -algèbre de la C^* -algèbre de Roe, alors $C_r^*(G)$ est exacte. Ozawa prouve alors la réciproque du résultat de [HR00] de Higson et Roe et montre que pour tout groupe G discret dont la C^* -algèbre $C_r^*(G)$ est exacte, la C^* -algèbre de Roe du groupe est nucléaire.

Dans le chapitre 7 de l'article [AD02], Anantharaman-Delaroche étudie la moyennabilité à l'infini des groupes localement compacts. L'auteur définit pour tout groupe G localement compact, un G -espace compact, noté $\beta^u G$, comme le spectre d'une algèbre et qui coïncide dans le cas d'un groupe discret avec le compactifié de Stone-Cëch βG . Elle prouve dans la proposition 3.4, que pour tout groupe localement compact G , la moyennabilité à l'infini de G équivaut à la moyennabilité du groupe de transformation $(\beta^u G, G)$. Elle démontre le théorème suivant

Théorème 1.8 ([AD02]). *Soit G un groupe localement compact. On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupe G est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupe G est exact*
- (3) *Pour toute G - C^* -algèbre exacte B , la C^* -algèbre de produit croisé réduit $C_r^*(G, B)$ est une C^* -algèbre exacte.*
- (4) *la C^* -algèbre $C_r^*(G)$ est exacte*

Alors (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4). Si le groupe G possède la propriété (W), alors (4) \Rightarrow (1) et les assertions sont toutes équivalentes.

Le travail qui suit consiste en l'étude des groupoïdes étales localement compacts σ -compacts et séparés qui généralisent les groupes discrets, les groupes de transformations (X, G) avec G un groupe discret et X un G -espace localement compact σ -compact et séparé ou encore qui apparaissent dans l'étude des groupoïdes d'holonomie de feuilletages. On s'intéresse principalement à des propriétés de moyennabilité ; la moyennabilité dans le cadre des groupoïdes localement compacts et séparés joue un rôle dans la théorie des algèbres d'opérateurs : on a vu auparavant les liens entre l'existence d'une action moyennable d'un groupe G localement compact sur un espace compact et l'exactitude de sa C^* -algèbre réduite.

On verra notamment les relations entre des propriétés de moyennabilité du groupoïde, des propriétés d'exactitude du groupoïde et d'exactitude de la C^* -algèbre réduite du groupoïde.

- La définition 3.2 donne une version de la moyennabilité à l'infini dans le cas des groupoïdes étales localement compacts et séparés.
- L'espace $\beta_X \mathcal{G}$ est défini comme le spectre d'une certaine \mathcal{G} -algèbre, notée $C_0^s(\mathcal{G})$ (définition dans la section 3.2) et dans le cas où \mathcal{G} est un groupe discret, l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ est exactement le compactifié de Stone-Cech $\beta \mathcal{G}$.
- Un groupoïde étale localement compact \mathcal{G} est dit exact si le foncteur " $\rtimes_r \mathcal{G}$ " est exact dans la catégorie des \mathcal{G} -algèbres et des \mathcal{G} -homomorphismes.

Les résultats que nous obtenons pour les groupoïdes étales localement compacts peuvent être schématisés par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \text{ moyennable à l'infini} & & \\
 \Downarrow & & \\
 \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \text{ moyennable} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{G} \text{ exact} \\
 & \searrow \text{+(Cond)} & \Downarrow \\
 & & C_r^*(\mathcal{G}) \text{ exact}
 \end{array}$$

L'implication " $C_r^*(\mathcal{G})$ exact $\Rightarrow (\beta_X \mathcal{G}, \mathcal{G})$ moyennable" n'a été obtenue dans notre cas qu'en imposant certaines conditions sur le groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows X$: la première est une version pour les groupoïdes de la Propriété (W) introduite dans [AD02]. La seconde intervient dans l'étude de la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ à laquelle on associe un champ de C^* -algèbres sur X que l'on supposera continu.

Dans toute la section on considère $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde étale localement compact, σ -compact et séparé. On utilise comme référence [Wil07] pour ce qui est des notions de $C_0(X)$ -algèbres et de champ (semi-)continu (supérieurement) de C^* -algèbres et leur relation.

Remerciements : Ce travail constitue une partie de ma thèse de doctorat. Je tiens à remercier mon directeur de thèse Jean Louis TU pour m'avoir proposé ce sujet et pour ces nombreux conseils.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. Groupoïdes topologiques. Un groupoïde peut être vu comme une généralisation des groupes et des espaces. Il s'agit d'une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Il est courant d'adopter les notations $\mathcal{G}^{(0)}$ pour définir les objets et \mathcal{G} (parfois noté $\mathcal{G}^{(1)}$) pour définir les morphismes (souvent appelés flèches). On donne ci-dessous une définition plus concrète d'un groupoïde

Définition 2.1. *Un groupoïde consiste en la donnée de deux espaces \mathcal{G} et $\mathcal{G}^{(0)}$ et d'applications*

- a) $s, r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ respectivement applications source et but,

b) $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$, l'application produit, où $\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(\gamma) = r(\eta)\}$,

ainsi que d'une application unité notée $u : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$ et d'une application inverse notée $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ vérifiant, si l'on note $m(\gamma, \eta) = \gamma.\eta$, $u(x) = x$ et $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, les relations suivantes

- $r(\gamma.\eta) = r(\gamma)$ et $s(\gamma.\eta) = s(\eta)$
- $\gamma.(\eta.\delta) = (\gamma.\eta).\delta$, pour tout (γ, η) et (η, δ) dans $\mathcal{G}^{(2)}$
- $\gamma.x = \gamma$ et $x.\eta = \eta$, pour tout (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)} : s(\gamma) = x = r(\eta)$
- $\gamma.\gamma^{-1} = r(\gamma)$ et $\gamma^{-1}.\gamma = s(\gamma)$, pour tout γ dans \mathcal{G}

Notation 2.2. Il est assez courant de simplifier les notations en occultant la fonction u et en considérant $\mathcal{G}^{(0)}$ comme un sous espace de \mathcal{G} . De même, on pourra se permettre d'écrire $\gamma.\eta$ voire $\gamma\eta$ pour $m(\gamma, \eta)$ afin d'alléger les formules.

On considère par la suite des groupoïdes topologiques c'est-à-dire les groupoïdes $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ pour lesquels les espaces \mathcal{G} et $\mathcal{G}^{(0)}$ sont munis d'une topologie et les applications de structure du groupoïde, r, s, m, u, i sont continues.

Proposition 2.3 ([Tu04]). *Si $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ est un groupoïde séparé localement compact (respectivement localement compact σ -compact) alors son espace des unités $\mathcal{G}^{(0)}$ est localement compact (respectivement localement compact σ -compact).*

Démonstration. On note $\Delta_{\mathcal{G}}$ la diagonale de l'espace $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Le groupoïde \mathcal{G} étant séparé, $\Delta_{\mathcal{G}}$ est un sous espace fermé de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G}^{(0)} = (id, r)^{-1}(\Delta_{\mathcal{G}})$ est fermé dans \mathcal{G} , donc localement compact.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous espaces compacts dans \mathcal{G} , telle que $\mathcal{G} = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. L'application $r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ étant continue, $(r(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous espaces compacts de $\mathcal{G}^{(0)}$ telle que $\cup_{n \in \mathbb{N}} r(K_n) = \mathcal{G}^{(0)}$. Alors $\mathcal{G}^{(0)}$ est localement compact σ -compact. □

Définition 2.4. *Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ un groupoïde topologique et X et Y des sous espaces de $\mathcal{G}^{(0)}$. On appelle \mathcal{G}_X l'ensemble des flèches de \mathcal{G} qui "commencent dans X " et \mathcal{G}^Y l'ensemble des flèches qui "terminent dans Y " c'est-à-dire les sous espaces de \mathcal{G} définis par*

$$\mathcal{G}_X := \{\gamma \in \mathcal{G} : s(\gamma) \in X\} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^Y := \{\gamma \in \mathcal{G} : r(\gamma) \in Y\}$$

On note $\mathcal{G}_X^Y := \mathcal{G}_X \cap \mathcal{G}^Y$ l'ensemble des flèches qui commencent dans X et finissent dans Y . Lorsqu'on considère $A := \{x\}$ réduit à un seul élément, on dit que \mathcal{G}_x (resp. \mathcal{G}^x) est la s -fibre (resp. r -fibre) au point x et l'ensemble \mathcal{G}_x^x est muni d'une structure de groupe qu'on appelle le groupe d'isotropie en x du groupoïde \mathcal{G} .

Exemples 2.5. *On donne quelques exemples de groupoïdes topologiques et on montre comment certains ensembles classiques peuvent être vu comme des groupoïdes :*

- (1) **Groupe** : tout groupe topologique G peut être considéré comme le groupoïde topologique $G \rightrightarrows \{e\}$ où les applications but et source s'identifient à la projection continue sur l'élément neutre e du groupe, la multiplication (resp. inversion) pour le groupoïde s'identifie à la multiplication (resp. inversion) du groupe. Lorsque le groupe est de Lie, alors le groupoïde induit est aussi de Lie.
- (2) **Espace** : tout espace topologique (resp. variété) M peut être considéré comme un groupoïde topologique (resp. de Lie) $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, où l'ensemble \mathcal{G} est l'espace topologique (resp. la variété) M , c'est-à-dire l'espace même des unités. Toutes les applications de structures s'identifient à l'identité. On l'appelle le groupoïde identité associé à l'espace topologique (resp. la variété) M .
- (3) **Groupeïde paire** : pour tout espace topologique M , on peut construire un autre groupoïde topologique noté $\text{Pair}(M) \rightrightarrows M$ et appelé le groupoïde paire de l'espace topologique M , dont l'espace des flèches est l'espace topologique produit $\text{Pair}(M) := M \times M$. Les applications but et source sont définies $s(x, y) := y$ et $r(x, y) := x$, et la multiplication $(x, y) \cdot (y, z) := (x, z)$, pour tout couple (x, y) et (y, z) de $M \times M$. Les applications inverse et unité sont $i(x, y) := (x, y)^{-1} = (y, x)$ et $u(x) := (x, x)$.
- (4) **Action de groupe** : on considère un groupe de Lie G agissant à gauche par difféomorphismes sur une variété M . On appelle groupoïde de transformation le groupoïde noté $G \ltimes M \rightrightarrows M$, où l'espace des flèches $G \ltimes M$ est la variété produit $G \times M$.
- (5) **Pullback** : soient M un espace topologique, \mathcal{G} un groupoïde topologique et $\varphi : M \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ une application continue et surjective. L'espace

$$\varphi^* \mathcal{G} := \{(m, \gamma, m') \in M \times \mathcal{G} \times M : r(\gamma) = m, s(\gamma) = m'\} = M \times_{\varphi, r} \mathcal{G} \times_{s, \varphi} M$$

est muni d'une structure de groupoïde topologique où l'espace des unités est M et les flèches reliant m' et m dans M sont les flèches de \mathcal{G} reliant $\varphi(m)$ et $\varphi(m')$. L'application but étant donnée par la première projection, l'application source par la troisième projection. Le produit est défini par $(m_1, \gamma, m_2) \cdot (m_2, \gamma', m_3) = (m_1, \gamma\gamma', m_3)$ et l'inverse par $(m, \gamma, m')^{-1} = (m', \gamma^{-1}, m)$.

Définition 2.6. On considère deux groupoïdes topologiques $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ et $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}^{(0)}$ et on note $s_{\mathcal{G}}$ (respectivement $s_{\mathcal{H}}$) l'application source de \mathcal{G} (respectivement \mathcal{H}) et $r_{\mathcal{G}}$ (respectivement $r_{\mathcal{H}}$) l'application but de \mathcal{G} (respectivement \mathcal{H}). Un homomorphisme de groupoïdes $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est défini par deux applications continues

$$\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \varphi^{(0)} : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}^{(0)}$$

telles que les relations suivantes sont satisfaites : pour tout (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$

- $\varphi(\gamma\eta) = \varphi(\gamma) \circ \varphi(\eta)$,
- $s_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \varphi^{(0)} \circ s_{\mathcal{G}}$
- $r_{\mathcal{H}} \circ \varphi = \varphi^{(0)} \circ r_{\mathcal{G}}$
- $\varphi(\gamma^{-1}) = \varphi(\gamma)^{-1}$

Exemples 2.7. On donne deux exemples basiques d'homomorphismes stricts de groupoïdes :

- (1) Il est clair qu'un homomorphisme de groupes topologique $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme (strict) de groupoïdes lorsqu'on se place du point de vue des groupoïdes.
- (2) Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques définit un homomorphisme strict entre les groupoïdes identités induits par les espaces topologiques. Il en va de même pour les groupoïdes paires associés aux espaces topologiques.

Définition 2.8. Un groupoïde topologique $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ est dit étale si les applications but r et source s sont des homéomorphismes locaux. Dans le cas où \mathcal{G} est un groupoïde de Lie, on demande à ce que les applications but r et source s soient des difféomorphismes locaux.

Remarque 2.9. On remarque que tout groupoïde étale propre possède des groupes d'isotropie qui sont finis.

On donne la définition d'une action à droite d'un groupoïde sur un espace (l'action à gauche étant définie de manière analogue).

Définition 2.10. Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^{(0)}$ un groupoïde topologique et Z un espace localement compact, séparé et σ -compact. On appelle action à droite du groupoïde \mathcal{G} sur l'espace Z , la donnée d'une application continue $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ (souvent appelée application momentum) et d'une application continue de $Z \times_{\sigma, r} \mathcal{G}$ à valeurs dans Z , noté $(z, \gamma) = z \cdot \gamma$ et vérifiant pour tout $z \in Z$

- a) $\sigma(z \cdot \gamma) = s(\gamma)$, pour tout γ dans \mathcal{G} tel que $\sigma(z) = r(\gamma)$.
- b) $z \cdot x = z$, pour tout x dans $\mathcal{G}^{(0)}$ tel que $\sigma(z) = x$.
- c) $(z \cdot \gamma) \cdot \gamma' = z \cdot (\gamma \cdot \gamma')$, pour tout (γ, γ') dans $\mathcal{G}^{(2)}$ tel que $\sigma(z) = r(\gamma)$

Remarque 2.11. L'application $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ est appelée parfois application momentum de l'action de \mathcal{G} sur Z .

L'action d'un groupoïde \mathcal{G} sur un espace Z permet de construire un groupoïde produit croisé de Z par \mathcal{G} , noté $Z \rtimes \mathcal{G}$, composé de l'ensemble des triplets (z, γ, y) dans $Z \times \mathcal{G} \times Z$, tels que $z \cdot \gamma = y$. Les éléments de $(Z \rtimes \mathcal{G})^{(2)}$ sont les paires $((x, \gamma, y), (y, \gamma', z))$ et leur multiplication est définie par $(x, \gamma, y) \cdot (y, \gamma', z) = (x, \gamma \cdot \gamma', z)$. L'inverse de $(x, \gamma, y)^{-1} = (y, \gamma^{-1}, x)$.

2.2. Algèbres associées à un groupoïde. Dans cette section, on rappelle les constructions des C^* -algèbres pleines et réduites associées à un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar.

2.2.1. Algèbres de convolution et représentations. On définit, pour un groupoïde \mathcal{G} muni d'un système de Haar, une structure $*$ -algébrique sur l'espace vectoriel complexe $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continues et à support compact sur le groupoïde. On définit tout d'abord le produit de convolution et l'involution sur $C_c(\mathcal{G})$; on étudie les $*$ -représentations afin

d'obtenir des C^* -normes qui nous permettront de construire des C^* -algèbres.

Soit \mathcal{G} un groupoïde séparé localement compact muni d'un système de Haar $\nu = \{\nu^x, x \in \mathcal{G}^{(0)}\}$ et $C_c(\mathcal{G})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions continues à support compact sur le groupoïde et à valeurs complexes.

Définition 2.12. *On définit une involution $*$ et un produit de convolution \star sur $C_c(\mathcal{G})$ de la manière suivante*

(i) *Convolution : pour toutes fonctions f, g dans $C_c(\mathcal{G})$, on pose*

$$f \star g := \int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma') g(\gamma\gamma') d\nu^{r(\gamma)}(\gamma')$$

(ii) *Involution : pour toute fonction f dans $C_c(\mathcal{G})$ et tout γ dans \mathcal{G} , on pose*

$$f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}$$

Remarque 2.13. On peut munir la $*$ -algèbre $C_c(\mathcal{G})$ de la topologie induite par la famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_K : K \subset \mathcal{G} \text{ compact}\}$, définie pour tout K compact dans \mathcal{G} et toute fonction f de $C_c(\mathcal{G})$ par :

$$\|f\|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

La structure dépend du choix du système de Haar ν : on la note généralement $C_c(\mathcal{G}, \nu)$ ou $C_c(\mathcal{G})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On définit une norme sur $C_c(\mathcal{G}, \nu)$ de la manière suivante :

Définition 2.14. *On note $\|\cdot\|_I$ la norme sur la $*$ -algèbre topologique $C_c(\mathcal{G})$ définie, pour toute fonction f dans $C_c(\mathcal{G})$ par*

$$\|f\|_I := \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}^x} |f(\gamma)| d\nu^x(\gamma), \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}_x} |f(\gamma)| d\nu_x(\gamma) \right\}$$

Remarque 2.15. On montre facilement que $\|\cdot\|_I$ vérifie les propriétés d'une norme sur $C_c(\mathcal{G})$. De plus, pour toutes fonctions f, g dans $C_c(\mathcal{G})$, on a

$$\|f\|_I = \|f^*\|_I \quad \text{et} \quad \|f \star g\|_I \leq \|f\|_I \|g\|_I$$

On rappelle quelques définitions sur les représentations de C^* -algèbres :

Définition 2.16. *Soit B une C^* -algèbre et H un espace de Hilbert. Une $*$ -représentation de B dans H est un $*$ -homomorphisme $\pi : B \rightarrow L(H)$. Une $*$ -représentation est dite fidèle si elle est injective.*

D'après le théorème de Gelfand, pour toute C^* -algèbre B , il existe une espace de Hilbert H et une représentation fidèle $\pi : B \rightarrow L(H)$. Si la C^* -algèbre B est séparable, alors H peut être l'unique (à isométrie près) espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Ce théorème signifie que toute C^* -algèbre peut être vue comme une sous-algèbre involutive fermée (pour la norme des opérateurs) de $L(H)$.

Définition 2.17. *Soient B une $*$ -algèbre de Banach et $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de $*$ -représentations continues de B . Le complété de l'algèbre de Banach involutive B par la semi-norme*

$$\|x\| := \sup_{\alpha \in \Lambda} \|\pi_\alpha(x)\|$$

est une C^* -algèbre appelée la C^* -algèbre enveloppante de B .

Remarque 2.18. On s'intéresse aux $*$ -représentations de $C_c(\mathcal{G})$ dans un espace de Hilbert H c'est-à-dire aux $*$ -homomorphismes

$$\pi : C_c(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

continus pour la topologie faible sur $\mathcal{B}(H)$ et tels que l'espace vectoriel engendré par $\{\pi(f)\xi, f \in C_c(\mathcal{G}), \xi \in H\}$ est dense dans H .

Définition 2.19. Une $*$ -représentation π est continue pour la norme $\|\cdot\|_I$ s'il existe $M > 0$ tel que pour toute fonction f de $C_c(\mathcal{G})$ on a

$$\|\pi(f)\| \leq M \|f\|_I$$

2.2.2. C^* -algèbres réduites et pleines d'un groupoïde. On considère $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda(\mathcal{G})}$ l'ensemble des $*$ -représentations continues et I -bornées de $C_c(\mathcal{G})$. On utilise ces $*$ -représentations pour définir des C^* -normes.

Définition 2.20. Soit \mathcal{G} un groupoïde séparé localement compact muni d'un système de Haar ν et $C_c(\mathcal{G})$ la $*$ -algèbre topologique associée.

La C^* -algèbre pleine $C^*(\mathcal{G})$ est l'algèbre enveloppante de $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$ c'est-à-dire le complété de l'algèbre de Banach involutive $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$ pour la semi-norme définie pour toute fonction f dans $\overline{C_c(\mathcal{G})}^{\|\cdot\|_I}$ par

$$\|f\| := \sup_{\alpha \in \Lambda(\mathcal{G})} \|\pi_\alpha(f)\|$$

Pour définir la C^* -algèbre réduite du groupoïde, on a besoin des quelques remarques qui suivent : on considère x un élément de $\mathcal{G}^{(0)}$ et $L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $C_c(\mathcal{G}^x)$ pour la norme

$$\|\xi\|_2 = \left(\int_{\mathcal{G}^x} |\xi(\gamma)|^2 d\nu^x(\gamma) \right)^{1/2}$$

On note $\pi_x : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x))$ la $*$ -représentation non-dégénérée définie pour tout f dans $C_c(\mathcal{G})$ et tout g dans $L^2(\mathcal{G}^x, \nu^x)$ par

$$(\pi_x(f)(g))(\gamma) := \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma') g(\gamma'\gamma) d\nu^x(\gamma') = f \star g(\gamma)$$

Pour tout x dans $\mathcal{G}^{(0)}$, la $*$ -représentation π_x vérifie

$$\|\pi_x(f)\| \leq \|f\|_I$$

Définition 2.21. La C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$ est la completion de $C_c(\mathcal{G})$ pour la C^* -norme réduite $\|\cdot\|_r$ définie pour toute fonction f de $C_c(\mathcal{G})$ par

$$\|f\|_r := \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\pi_x(f)\|$$

2.3. Modules de Hilbert et représentation régulière. On fait un rappel succinct sur les modules de Hilbert. On trouve de nombreuses références sur ce sujet notamment les ouvrages [Lan95], [MT05] ou encore [Kas80]. On rappelle quelques définitions concernant les opérateurs sur les modules de Hilbert ainsi que la construction du produit tensoriel interne.

Définition 2.22. Soit B une C^* -algèbre et \mathcal{E} et \mathcal{F} des B -modules de Hilbert.

- Un opérateur $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application qui admet un adjoint s'il existe une application $T^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que,

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle$$

pour tout $\xi \in \mathcal{E}$ et tout $\eta \in \mathcal{F}$. T^* est appelé l'adjoint de T .

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications de \mathcal{E} dans \mathcal{F} qui admettent un adjoint. On note $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ pour $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Remarque 2.23. Une application qui admet un adjoint est automatiquement \mathbb{C} -linéaire et même B -linéaire et est un opérateur borné.

Comme dans le cas des espaces de Hilbert, il existe des opérateurs de rang un dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soient ξ dans E et η dans F , on pose $\theta_{\xi, \eta}$ l'opérateur de $\mathcal{L}(E, F)$ défini pour tout ζ dans E par $\theta_{\xi, \eta}'(\zeta) = \xi \langle \eta, \zeta \rangle$ et tel que $\theta_{\xi, \eta}^* = \theta_{\eta, \xi}$. Si T est un opérateur dans $\mathcal{L}(F, G)$, alors on a $T \circ \theta_{\xi, \eta} = \theta_{T\xi, \eta}$ et si T est dans $\mathcal{L}(G, E)$, alors $\theta_{\xi, \eta} \circ T = \theta_{\xi, T^*\eta}$. On note $\mathcal{K}_0(E, F)$ l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de rang un et la fermeture de $\mathcal{K}_0(E, F)$ est appelée l'ensemble des opérateurs "compacts" du module de Hilbert E vers le module de Hilbert F (même s'ils ne sont pas compacts comme opérateurs entre espaces de Banach) et est noté $\mathcal{K}(E, F)$. On note $\mathcal{K}(E)$ pour l'idéal fermé $\mathcal{K}(E, E)$ de la C^* -algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Soient B_1 et B_2 des C^* -algèbres et pour i dans $\{1, 2\}$, on considère E_i un B_i -module de Hilbert muni du produit scalaire $\langle -, - \rangle_i$ à valeurs dans B_i . On suppose qu'il existe un $*$ -homomorphisme $\phi : B_1 \rightarrow \mathcal{L}_{B_2}(E_2)$. Le produit tensoriel interne est une construction qui permet d'associer à E_1, E_2 et ϕ un B_2 -module de Hilbert noté $E_1 \otimes_\phi E_2$: pour cela on considère E_2 muni de la structure de B_1 -module définie pour tout b_1 dans B_1 et e_2 dans E_2 par $b_1.e_2 = \phi(b_1)(e_2)$ et on note $E_1 \odot_{B_1} E_2$ le produit tensoriel algébrique muni d'une structure de B_2 -module à droite. Le produit tensoriel interne $E_1 \otimes_\phi E_2$ est le complété du produit tensoriel algébrique $E_1 \odot E_2$ pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$ à valeur dans B_2 défini pour tout e_1 et e'_1 dans E_1 et tout e_2 et e'_2 dans E_2 par

$$\langle e_1 \otimes e_2, e'_1 \otimes e'_2 \rangle = \langle e_2, \langle e_1, e'_1 \rangle_1 . e'_2 \rangle_2$$

avec $\langle e_1, e'_1 \rangle_1 . e'_2 = \phi(\langle e_1, e'_1 \rangle_1)(e'_2)$.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar ν . On considère sur l'espace vectoriel complexe $C_c(\mathcal{G})$ le produit scalaire à valeurs dans $C_0(X)$ défini pour toutes fonction ξ et ζ dans $C_c(\mathcal{G})$ par

$$\langle \xi, \zeta \rangle : x \rightarrow \int_{\mathcal{G}^x} \xi^*(\gamma) \zeta(\gamma^{-1}) d\nu^x(\gamma)$$

qui correspond en fait à la restriction à l'espace X de l'application $\xi^* \star \zeta$. On définit une structure de $C_0(X)$ -module (à gauche) sur $C_c(\mathcal{G})$ en posant, $\xi.f(\gamma) = \xi(\gamma)f(s(\gamma))$, pour toutes fonctions ξ dans $C_c(\mathcal{G})$, f de $C_0(X)$ et tout γ dans \mathcal{G} . On obtient alors un $C_0(X)$ -module préhilbertien et on note $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ le $C_0(X)$ -module de Hilbert obtenu en quotientant $C_c(\mathcal{G})$ par le sous-module des éléments de norme nulle.

Proposition 2.24. *L'ensemble $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ des opérateurs $C_0(X)$ -linéaires qui admettent un adjoint est muni d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ des opérateurs $C_0(X)$ -linéaires sur $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ qui admettent un adjoint est muni d'une structure de C^* -algèbre.

Par définition, les opérateurs de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ sont $C_0(X)$ -linéaires, c'est-à-dire que

$$T(\xi.f) = T(\xi).f$$

pour tout T dans $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, f dans $C(X)$ et ξ dans $L^2(\mathcal{G}, \nu)$. L'algèbre des multiplicateurs $M(\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu)))$ étant égal à $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, on pose

$$\phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(M(\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))))$$

définie par $\phi(f)(T)(\xi) := T(\xi.f) = T(\xi).f$, pour tout T dans $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, f dans $C_0(X)$ et ξ dans $L^2(\mathcal{G}, \nu)$.

L'homomorphisme $\phi : C_0(X) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ étant non-dégénéré, il définit une structure de $C_0(X)$ -algèbre sur $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$. \square

Remarque 2.25. Comme $C_c(\mathcal{G})$ agit sur lui-même par convolution, on a un homomorphisme injectif $\lambda : C_c(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ qui s'étend en une $*$ -représentation de $\lambda : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ dont l'image est $*$ -isomorphe à la C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$. On obtient une représentation fidèle de la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ dans le $C_0(X)$ -module de Hilbert $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$. L'image par la représentation λ de $C_r^*(\mathcal{G})$ est une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, qui n'est pas nécessairement stable par la structure de $C_0(X)$ -module de $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$.

3. GROUPOÏDE MOYENNABLE À L'INFINI ET ESPACE UNIVERSEL

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde étale localement compact et séparé tel que l'espace des unités X est σ -compact. Le résultat principal de cette section est la démonstration du théorème 3.31 que l'on donne ci-dessous :

Théorème 1. *Soit \mathcal{G} un groupoïde étale d'espace des unités X . On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupoïde \mathcal{G} est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupoïde \mathcal{G} agit moyennablement sur l'espace $\beta_X \mathcal{G}$*
- (3) *le groupoïde \mathcal{G} est exact*
- (4) *la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ est exacte*

Alors on a (1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)

Il s'agit d'un résultat analogue à la proposition 1.8 dans le cas plus général des groupoïdes étales localement compacts et séparés. Les parties 3.1 à 3.6 qui suivent permettent de définir une version de la moyennabilité à l'infini pour les groupoïdes ainsi qu'un espace $\beta_X \mathcal{G}$ muni d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} qui satisfait une propriété universelle et qui joue le rôle du compactifié de Stone-Cech dans le cas des groupes discrets. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit \mathcal{G} un groupoïde étale localement compact et X l'espace localement compact des unités du groupoïde \mathcal{G} . Si le groupoïde \mathcal{G} est moyennable à l'infini, alors le groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable.*

On donne tout d'abord une définition de la moyennabilité infinie pour les groupoïdes :

Définition 3.2. *Soit \mathcal{G} un groupoïde étale localement compact et X l'espace des unités (localement compact) du groupoïde \mathcal{G} . Le groupoïde est dit moyennable à l'infini s'il existe un \mathcal{G} -espace localement compact et séparé Y , pour lequel l'application $\pi : Y \rightarrow X$ est continue, surjective, ouverte et propre, et tel que le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable.*

Pour démontrer le théorème 3.1, on raisonne de la manière suivante :

- 1) il s'agit tout d'abord de définir l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ comme étant le spectre d'une C^* -algèbre commutative qui sera notée $C_0^s(\mathcal{G})$
- 2) on munit l'espace topologique $\beta_X \mathcal{G}$ d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} et on prouve que $\beta_X \mathcal{G}$ vérifie une propriété universelle
- 3) à l'aide de la propriété universelle de $\beta_X \mathcal{G}$ et des propriétés des groupoïdes moyennables, on démontre de théorème 3.1.

La partie 3.1 de cette section est constituée de quelques résultats généraux sur les C^* -algèbres qui nous seront utiles dans la suite.

La partie 3.2 consiste à définir la C^* -algèbre commutative $C_0^s(\mathcal{G})$: il s'agit d'une sous- C^* -algèbre de la C^* -algèbre commutative des fonctions à valeurs complexes, continues et bornées sur \mathcal{G} . On peut alors définir une structure de $C_0(X)$ -algèbre sur $C_0^s(\mathcal{G})$ et la munir d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} . On obtient ainsi un système dynamique de groupoïde $(C_0^s(\mathcal{G}), \mathcal{G}, \alpha)$.

La partie 3.3 porte sur l'étude de l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ qui est défini comme le spectre de $C_0^s(\mathcal{G})$. Le fait que $C_0^s(\mathcal{G})$ soit une \mathcal{G} -algèbre commutative induit une action continue de \mathcal{G} sur l'espace localement compact et séparé $\beta_X \mathcal{G}$. On termine cette partie en prouvant que l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ vérifie la propriété universelle suivante : soit Z un \mathcal{G} -espace localement compact et séparé tel que $Z \rightarrow X$ est continue, surjective, propre et admet une section continue (non nécessairement équivariante), alors il existe une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ continue, \mathcal{G} -équivariante et propre.

La propriété universelle vérifiée par $\beta_X \mathcal{G}$ est le résultat essentiel qui nous permet de démontrer le théorème 3.1 : en effet, si \mathcal{G} est moyennable à l'infini, alors il existe un \mathcal{G} -espace Y localement compact et séparé tel que l'application $Y \rightarrow X$ est continue,

surjective, ouverte et propre et sur lequel l'action de \mathcal{G} est moyennable. On ne peut appliquer dans ce cas la propriété universelle car la condition d'existence d'une section de $Y \rightarrow X$ n'est pas (nécessairement) vérifiée. C'est l'objet des parties 3.4 et 3.5 qui consiste à définir un \mathcal{G} -espace localement compact et séparé M obtenu en considérant un sous espace des mesures de probabilité de Y . On s'emploie alors à démontrer l'existence d'une section continue pour l'application $M \rightarrow X$ et prouver ainsi que l'espace M satisfait les conditions de la propriété universelle de $\beta_X \mathcal{G}$: on a alors une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ continue, \mathcal{G} -équivariante et propre.

Dans la partie 3.6, on prouve que l'action de \mathcal{G} sur M est moyennable et on montre comment on peut "tiré en arrière" le caractère moyennable de $M \rtimes \mathcal{G}$ sur $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ par le biais de l'application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$. Enfin on termine cette section en démontrant dans la partie 3.7 le théorème 3.31.

3.1. Quelques propriétés des C^* -algèbres commutatives. On démontre ici quelques résultats généraux dans le cadre des C^* -algèbres commutatives, qui seront utilisés dans cette section.

Définition 3.3. Soit $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ un homomorphisme de C^* -algèbres ; on dit que i est non dégénéré si pour toute approximation de l'unité, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, de $C_0(X)$, la suite généralisée $(i(e_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est une approximation de l'unité de $C_0(Y)$.

Proposition 3.4. Si un homomorphisme $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ de C^* -algèbres est non dégénéré, alors il existe une application $i^* : Y \rightarrow X$, induite par i .

Démonstration. On considère χ un caractère, non nul, de $C_0(Y)$ c'est-à-dire un homomorphisme non nul $\chi : C_0(Y) \rightarrow \mathbb{C}$. Il existe alors un unique $y \in Y$ tel que pour toute fonction f dans $C_0(Y)$, on a $\chi(f) = f(y)$. On pose $\chi' := \chi \circ i$. C'est un homomorphisme (car composition d'homomorphismes) de $C_0(X)$ dans \mathbb{C} , qui est non nul ; en effet, supposons que χ' est l'homomorphisme nul. On considère $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une approximation de l'unité de $C_0(X)$. Comme l'homomorphisme $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ est non dégénéré, la suite $(i(e_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ est une approximation de l'unité de $C_0(Y)$, donc on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \chi(i(e_\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} i(e_\lambda)(y) = 1$$

Or on a supposé $\chi' = \chi \circ i$, d'où $\chi(i(e_\lambda)) = \chi'(e_\lambda) = 0$, pour tout λ dans Λ . On obtient une contradiction. Donc l'homomorphisme $\chi' : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ est non nul. Il existe alors un unique x dans X vérifiant pour toute fonction g de $C_0(X)$, l'égalité $\chi'(g) = g(x)$.

Ainsi, par l'homomorphisme $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$, non dégénéré, à tout y dans Y , on peut associer un unique élément x de X . On a donc une application $i^* : Y \rightarrow X$, induite par i .

□

Proposition 3.5. Soit $i : C_0(X) \hookrightarrow C_0(Y)$ un homomorphisme de C^* -algèbres et $i^* : Y \rightarrow X$ l'application induite par i . Si i est injectif et non dégénéré, alors l'application $i^* : Y \rightarrow X$ est continue, surjective et propre.

Démonstration. Pour montrer que l'application est continue, on considère U un ouvert de X . On pose $V = (i^*)^{-1}(U)$ l'image réciproque de U par l'application i^* . Soit y_0 un

élément de V et $x_0 = i^*(y_0)$. On considère une fonction f dans $C_0(X)$, à valeurs réelles positives et à support compact dans U telle que $f(x_0) = 1$. On a alors une fonction $i(f)$ dans $C_0(Y)$, à valeurs réelles positives et à support dans V . Soit $\varepsilon > 0$, le sous espace $U_\varepsilon := \{x \in X \mid 1 - \varepsilon < f(x)\}$ est un sous espace ouvert dans U contenant x_0 . On a alors $(i^*)^{-1}(U_\varepsilon) = \{y \in V \mid 1 - \varepsilon < i(f)(y)\}$, qui est un ouvert dans V contenant y_0 . Ainsi V est un ouvert de Y et l'application $i^* : Y \rightarrow X$ est continue.

Pour montrer que l'application $i^* : Y \rightarrow X$ est propre, on considère $K \subset X$ un sous espace compact et on montre que $(i^*)^{-1}(K)$ est compact dans Y . On considère f une fonction dans $C_0(X)$ telle que $f(x) = 1$, pour tout x dans K . L'application $i(f)$ est alors dans $C_0(Y)$ et on a, par définition, $i(f)(y) = 1$ pour tout y dans $(i^*)^{-1}(K)$.

De plus, $i(f)$ est dans $C_0(Y)$, alors il existe \tilde{K} un sous espace compact de Y tel que pour tout y dans $Y \setminus \tilde{K}$, on a $|f(y)| < 1$; le sous espace $(i^*)^{-1}(K)$ est fermé par continuité de i^* et contenu dans le compact \tilde{K} , donc $(i^*)^{-1}(K)$ est compact. L'application $i^* : Y \rightarrow X$ est donc propre.

Pour montrer que l'application i^* est surjective, on prouve tout d'abord que son image $Im(i^*)$ est dense dans X . Soit U un ouvert non vide de X . Montrons qu'il existe x dans $U \cap Im(i^*)$; en effet, si $Im(i^*) \cap U = \emptyset$, alors toute fonction f de $C_0(X)$, non nulle, et à support compact dans U a pour image par i la fonction nulle sur Y ; or ceci est en contradiction avec l'injectivité de $i : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$. Ainsi pour tout ouvert U de X , il existe un élément x qui soit dans l'image $Im(i^*)$. Donc i^* est à image dense dans X . L'application i^* étant propre, son image $Im(i^*)$ est fermée. L'image de i^* étant fermée et dense, alors l'application i^* est surjective. \square

3.2. \mathcal{G} -algèbre. Dans cette section, on considère $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde étale localement compact et séparé. On suppose que l'espace des unités X est σ -compact. On note $r : \mathcal{G} \rightarrow X$ et $s : \mathcal{G} \rightarrow X$ les applications but et source. On note $C_b(\mathcal{G})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues et bornées sur \mathcal{G} , où l'involution et la multiplication sont définies de la manière suivante :

$$f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma)} \quad \text{et} \quad f.g(\gamma) := f(\gamma)g(\gamma)$$

pour toutes fonctions f et g dans $C_b(\mathcal{G})$ et tout γ dans \mathcal{G} . On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme supérieure, définie, pour tout f dans $C_b(\mathcal{G})$, par $\|f\|_\infty := \sup_{\gamma \in \mathcal{G}} |f(\gamma)|$. Munie de cette norme, l'algèbre $C_b(\mathcal{G})$ est une C^* -algèbre.

Dans la définition qui suit, on introduit un sous ensemble de $C_b(\mathcal{G})$ que l'on note $C_0^s(\mathcal{G})$ et on montre que c'est une sous- C^* -algèbre de $C_b(\mathcal{G})$. L'objectif dans cette partie est de munir la C^* -algèbre $C_0^s(\mathcal{G})$ d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} . Pour cela, on définit tout d'abord une approximation de l'unité $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la C^* -algèbre $C_0(X)$ en utilisant la σ -compacité de X . A l'aide de l'application source $s : \mathcal{G} \rightarrow X$, on construit ensuite un $*$ -homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(M(C_0^s))$ et on se sert de l'approximation de l'unité $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que s^* est non-dégénérée et donc que $C_0^s(\mathcal{G})$ est une $C_0(X)$ -algèbre. Pour finir, on définit une action continue du groupoïde \mathcal{G} sur la $C_0(X)$ -algèbre $C_0^s(\mathcal{G})$ en utilisant les propriétés dues au caractère étale du groupoïde \mathcal{G} .

Définition 3.6. On note $C_0^s(\mathcal{G})$ le sous ensemble de $C_b(\mathcal{G})$ formé des fonctions f continues et bornées telles que pour tout réel ε strictement positif, il existe un sous espace compact K_ε de X tel que pour tout γ dans \mathcal{G} , tel que $s(\gamma)$ est dans $X \setminus K_\varepsilon$, on a $|f(\gamma)| < \varepsilon$.

Proposition 3.7. $C_0^s(\mathcal{G})$ est une sous C^* -algèbre de $C_b(\mathcal{G})$.

Démonstration. Il est clair que $C_0^s(\mathcal{G})$ est un sous espace vectoriel de $C_b(\mathcal{G})$ stable par l'involution. Pour toute fonction f (respectivement g) de $C_0^s(\mathcal{G})$ et pour tout réel ε strictement positif, il existe un sous espace compact K_ε (respectivement K'_ε) de X tel que pour tout γ dans \mathcal{G} tel que $s(\gamma)$ est dans $X \setminus K_\varepsilon$ (respectivement $X \setminus K'_\varepsilon$) on a $|f(\gamma)| < \sqrt{\varepsilon}$ (respectivement $|g(\gamma)| < \sqrt{\varepsilon}$). Ainsi pour tout γ de \mathcal{G} tel que $s(\gamma)$ est dans $X \setminus (K_\varepsilon \cup K'_\varepsilon)$, on a $|f.g(\gamma)| < \varepsilon$ et $C_0^s(\mathcal{G})$ est stable par le produit.

On considère $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C_0^s(\mathcal{G})$ qui converge vers une fonction f de $C_b(\mathcal{G})$. Soit ε un réel strictement positif : il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n > n_1$, on a $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$. De plus il existe un entier n_2 , tel que pour tout entier $p, q > n_2$, on a $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon/2$ et il existe donc un compact K_ε dans X tel que pour tout γ dans \mathcal{G} pour lequel $s(\gamma)$ est dans $X \setminus K_\varepsilon$, on a $|f_p(\gamma)| < \varepsilon/2$, pour tout $p > n_2$. On a alors pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier $n = \max\{n_1, n_2\}$ et un compact K_ε de X tel que pour tout γ de \mathcal{G} avec $s(\gamma)$ dans $X \setminus K_\varepsilon$, on a

$$|f(\gamma)| = |f(\gamma) - f_p(\gamma) + f_p(\gamma)| \leq |f(\gamma) - f_p(\gamma)| + |f_p(\gamma)| < \varepsilon$$

pour $p > n$. L'algèbre $C_0^s(\mathcal{G})$ est fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et est une sous C^* -algèbre de $C_b(\mathcal{G})$. □

Remarque 3.8. A partir de maintenant, on écrit C_0^s pour la C^* -algèbre $C_0^s(\mathcal{G})$, ceci afin de simplifier les notations.

On construit tout d'abord une approximation de l'unité pour la C^* -algèbre $C_0(X)$. L'espace X étant considéré σ -compact, on choisit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite croissante de sous espaces compacts de X , tels que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. On considère $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact dans X telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_n \\ 0 & \text{si } x \notin \overset{\circ}{K}_{n+1} \end{cases}$$

$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité de $C_0(X)$, puisque chaque fonction e_n est positive et dans la boule unité de $C_0(X)$; de plus la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et on a, pour toute fonction f de $C_0(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f.e_n\| = 0$$

On utilise l'approximation de l'unité $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite auparavant, pour définir une structure de $C_0(X)$ -algèbre sur C_0^s . Pour cela, on considère une fonction f de $C_0(X)$ et on pose $s^*(f)$ la fonction sur \mathcal{G} définie, pour tout γ dans \mathcal{G} , par $s^*(f)(\gamma) := f(s(\gamma))$. La fonction $s^*(f)$ est clairement continue et bornée. Pour tout réel ε strictement positif, il existe K_ε sous espace compact de X tel que pour tout x dans $X \setminus K_\varepsilon$, on a $|f(x)| < \varepsilon$. Ainsi

pour tout γ dans \mathcal{G} pour lequel $s(\gamma)$ est dans $X \setminus K_\varepsilon$, on a $|s^*(f)(\gamma)| = |f(s(\gamma))| < \varepsilon$. La fonction $s^*(f)$ est donc dans la C^* -algèbre C_0^s . On obtient une application $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$ dont il est facile de prouver qu'elle est un homomorphisme de C^* -algèbres.

Proposition 3.9. *L'homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$ est injectif et non-dégénéré.*

Démonstration. On sait que $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$ est un homomorphisme de C^* -algèbres. On considère f une fonction de $C_0(X)$ vérifiant $s^*(f) = 0$, alors pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, on a $s^*(f)(\gamma) = 0 = f(s(\gamma))$. Or pour tout x dans X , on a $u(x) \in \mathcal{G}$, et

$$f(x) = f(s(u(x))) = s^*(f)(u(x)) = 0$$

La fonction f est nulle sur X . Ainsi s^* est injectif.

Pour prouver que l'homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$ est non-dégénéré, il suffit de montrer que la suite $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité de C_0^s . Chaque fonction $s^*(e_n)$ est positive et se trouve dans la boule unité de C_0^s , car s^* est un homomorphisme injectif donc une application positive et isométrique. De plus, la suite $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit f une fonction de C_0^s alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n' dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq n'$ et pour tout γ hors de \mathcal{G}_{K_n} , on a $|f(\gamma)| < \varepsilon$. On a donc pour tout $n \geq n'$ et tout γ dans \mathcal{G}_{K_n}

$$\begin{aligned} |f(\gamma) - f(\gamma)\theta(e_n)(\gamma)| &= |f(\gamma) - f(\gamma)e_n(s(\gamma))| \\ &= |f(\gamma) - f(\gamma)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

et pour tout $n \geq n'$ et tout γ en dehors de \mathcal{G}_{K_n} , on a

$$\begin{aligned} |f(\gamma) - f(\gamma)s^*(e_n)(\gamma)| &= |f(\gamma) - f(\gamma)e_n(s(\gamma))| \\ &\leq |f(\gamma)||1 - e_n(s(\gamma))| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction f dans C_0^s et pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier n' tel que pour tout $n \geq n'$ et tout pour tout γ de \mathcal{G} , on a

$$|f(\gamma) - f(\gamma)s^*(e_n)(\gamma)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que pour toute fonction f de C_0^s , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - fs^*(e_n)\| = 0$$

Donc $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité dans C_0^s . L'homomorphisme s^* est donc non-dégénéré. □

Remarque 3.10. C_0^s étant une C^* -algèbre commutative, on a une injection de C_0^s dans $\mathcal{Z}(\mathcal{M}(C_0^s))$, le centre de l'algèbre des multiplicateurs.

Proposition 3.11. *La C^* -algèbre commutative C_0^s est munie d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre par l'homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{M}(C_0^s))$.*

Démonstration. Comme C_0^s s'injecte dans le centre $\mathcal{Z}(M(C_0^s))$ de l'algèbre des multipliateurs de C_0^s , alors s^* définit un homomorphisme de $C_0(X)$ dans $\mathcal{Z}(M(C_0^s))$. De plus, l'image $(s^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de l'approximation de l'unité $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_0(X)$ étant une approximation de l'unité de C_0^s , on a alors $s^*(C_0(X))C_0^s$ est dense dans C_0^s ; donc C_0^s est une $C_0(X)$ -algèbre par l'homomorphisme s^* . \square

On construit ci-dessous un système dynamique de groupoïde $(C_0^s, \mathcal{G}, \alpha)$: pour cela, le caractère étale du groupoïde nous permet de définir une action α du groupoïde \mathcal{G} sur la $C_0(X)$ -algèbre C_0^s et on prouve que cette action est continue. On rappelle quelques notations concernant les $C_0(X)$ -algèbres que l'on utilise ici : pour tout x dans X , on note $I_x := \overline{s^*(C_x(X))C_0^s}$ idéal fermé de C_0^s et $C_0^s(x) := C_0^s/I_x$, la fibre de C_0^s sur x . Pour tout x dans X et toute fonction f de C_0^s , on notera $f(x)$ l'image de f dans la fibre $C_0^s(x)$.

On définit une action du groupoïde \mathcal{G} sur la $C_0(X)$ -algèbre C_0^s c'est-à-dire qu'on construit une famille $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ telle que pour tout γ dans \mathcal{G} , l'application

$$\alpha_\gamma : C_0^s(s(\gamma)) \rightarrow C_0^s(r(\gamma))$$

est un isomorphisme vérifiant, pour tout (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$ l'égalité $\alpha_{\gamma \cdot \eta} = \alpha_\gamma \circ \alpha_\eta$.

Soit γ un élément de \mathcal{G} et U_γ un voisinage ouvert (que l'on peut supposer relativement compact) de γ dans \mathcal{G} tel que les restrictions des applications but et source à U_γ sont des homéomorphismes sur leur image respective $r(U_\gamma)$ et $s(U_\gamma)$. On note $x = s(\gamma)$ et $y = r(\gamma)$ dans X et on pose $\rho_x : s(U_\gamma) \rightarrow U_\gamma$ et $\rho_y : r(U_\gamma) \rightarrow U_\gamma$ les homéomorphismes réciproques des restrictions sur U_γ respectivement des applications source et but. Il existe alors un homéomorphisme $R_\gamma : r(U_\gamma) \rightarrow s(U_\gamma)$ défini, pour tout z dans $r(U_\gamma)$, par $R_\gamma(z) := s(\rho_y(z))$. On considère K_x un voisinage compact de x dans $s(U_\gamma)$ et φ_x une fonction continue et à support dans $s(U_\gamma)$ vérifiant $\chi_{K_x} \leq \varphi_x \leq 1$.

Soit f une fonction de C_0^s et $f(x)$ son image dans la fibre $C_0^s(x)$. On a alors égalité dans la C^* -algèbre $C_0^s(x)$ des éléments $f(x)$ et $(s^*(\varphi_x)f)(x)$

Pour tout η dans $\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}$, on pose

$$(1) \quad \tilde{f}(\eta) := (s^*(\varphi_x)f)(\eta \cdot \rho_y(s(\eta)))$$

qui définit une fonction continue sur $\mathcal{G}_{r(U_\gamma)}$ et pour tout η tel que $s(\eta)$ est en dehors de l'ouvert $r(U_\gamma)$ relativement compact, on a $\tilde{f}(\eta) = 0$. Ainsi \tilde{f} est dans la $C_0(X)$ -algèbre C_0^s .

Pour toute fonction f dans C_0^s , on pose $\alpha_\gamma(f(x)) := \tilde{f}(y)$. On montre aisément que pour toute fonction f dans C_0^s et toute paire (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$, on a l'égalité

$$\alpha_{\gamma \cdot \eta}(f) = \alpha_\gamma(\alpha_\eta(f))$$

On a ainsi défini une action du groupoïde \mathcal{G} sur la $C_0(X)$ -algèbre C_0^s .

Remarque 3.12. Sur la $C_0(X)$ -algèbre $C_0(\mathcal{G})$, il existe une action continue du groupoïde \mathcal{G} , notée a , où pour tout γ dans \mathcal{G} , on a

$$a_\gamma : C_0(\mathcal{G})(s(\gamma)) \cong C_0(\mathcal{G}_{s(\gamma)}) \longrightarrow C_0(\mathcal{G})(r(\gamma)) \cong C_0(\mathcal{G}_{r(\gamma)})$$

définie pour toute fonction f dans $C_0(\mathcal{G}_{s(\gamma)})$ par $a_\gamma(f)(\eta) = f(\eta \cdot \gamma)$, pour tout η dans $\mathcal{G}_{r(\gamma)}$. On voit alors que la restriction de l'action α , définie ci-dessus, à la sous $C_0(X)$ -algèbre $C_0(\mathcal{G})$ coïncide avec l'action continue a de \mathcal{G} sur $C_0(\mathcal{G})$.

Pour montrer que l'action de \mathcal{G} sur C_0^s est continue, on se place dans le contexte du champ continu de C^* -algèbres \mathcal{C}_0^s associé à C_0^s et on montre que l'application

$$C_0^s * \mathcal{G} \longrightarrow C_0^s$$

définie par l'action de \mathcal{G} sur l'espace topologique C_0^s est continue. On utilise la proposition C.20 de [Wil07].

On considère une suite $(a_i, \gamma_i)_{i \in I}$ dans $C_0^s *_{p,s} \mathcal{G}$ convergeant vers un élément (a, γ) de $C_0^s *_{p,s} \mathcal{G}$. Pour tout i dans I , on note $x_i := p(a_i) = s(\gamma_i)$ et $x := p(a) = s(\gamma)$. Pour tout i dans I , il existe une fonction f_i dans C_0^s telle que $f_i(x_i) = a_i$ et il existe une fonction f dans C_0^s telle que $f(x) = a$. On considère U un voisinage ouvert de γ dans \mathcal{G} homéomorphe à $V := s(U)$, voisinage ouvert de x et on peut supposer qu'il existe un compact K_x d'intérieur non vide et inclus dans V . On note $\varphi_x : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\chi_{K_x} \leq \varphi_x \leq 1$. Il existe i' dans I tel que pour tout $i \geq i'$, l'élément x_i est dans \mathring{K}_x . Quitte à utiliser la fonction φ_x , on peut supposer alors qu'il existe que pour tout $i \geq i'$, le support de f_i est inclus dans $s^{-1}(V)$. Suivant la construction 1, on obtient des fonctions \tilde{f}_i et \tilde{f} dans C_0^s telles que, pour tout $i \geq i'$, on a $\tilde{f}_i(r(\gamma_i)) = \alpha_{\gamma_i}(a_i)$ et $\tilde{f}(r(\gamma)) = \alpha_\gamma(a)$. Pour tout $i \geq i'$, on note $u_i = \tilde{f}(r(\gamma_i))$ et la suite $(u_i)_{i \geq i'}$ converge vers $\alpha_\gamma(a) = \tilde{f}(r(\gamma))$ dans C_0^s . Soit un réel ε strictement positif, il existe i_ε dans I , tel que pour tout $i \geq \max\{i', i_\varepsilon\}$, on a $\|\tilde{f}_i(r(\gamma_i)) - \tilde{f}(r(\gamma_i))\| < \varepsilon/2$ et alors $\alpha_{\gamma_i}(a_i) - \tilde{f}(r(\gamma_i))$ converge vers $0_{r(\gamma)}$ dans C_0^s . On a alors

$$\alpha_{\gamma_i}(a_i) = (\alpha_{\gamma_i}(a_i) - u_i) + u_i \longrightarrow 0_{r(\gamma)} + \alpha_\gamma(a)$$

L'action du groupoïde \mathcal{G} sur la $C_0(X)$ -algèbre C_0^s est continue et on a un système dynamique $(C_0^s, \mathcal{G}, \alpha)$.

3.3. Espace $\beta_X \mathcal{G}$ et propriété universelle. Dans cette partie, on utilise la \mathcal{G} -algèbre commutative C_0^s construite auparavant pour définir l'espace topologique $\beta_X \mathcal{G}$. Une fois l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ défini, on montre qu'il est localement compact et séparé et muni d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} .

Enfin on prouve que le \mathcal{G} -espace $\beta_X \mathcal{G}$ vérifie une propriété universelle.

Définition 3.13. On définit l'espace topologique $\beta_X \mathcal{G}$ comme le spectre de la C^* -algèbre commutative C_0^s .

Remarque 3.14. La C^* -algèbre $C_0(\mathcal{G})$ étant un idéal (bilatère) fermé de la C^* -algèbre C_0^s , l'espace $\mathcal{G} = \widehat{C_0(\mathcal{G})}$ est un sous espace ouvert de $\beta_X \mathcal{G}$. Par la transformée de Gelfand, il existe isomorphisme $*$ -isométrique de C^* -algèbres entre C_0^s et $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ et on a alors un homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$. On note

$$\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} = \widehat{C_0(\beta_X \mathcal{G})} \longrightarrow \widehat{C_0(X)} = X$$

l'application induite par l'homomorphisme s^* . L'application \tilde{s} restreinte à l'ouvert \mathcal{G} coïncide avec l'application source du groupoïde $s : \mathcal{G} \rightarrow X$.

Proposition 3.15. *L'application $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$ induite par l'homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ est continue, propre et surjective.*

Démonstration. D'après la proposition 3.9, on sait que l'homomorphisme $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0^s$ est injectif et non-dégénéré et d'après la remarque 3.14, C_0^s est isomorphe à $C_0(\beta_X \mathcal{G})$. L'homomorphisme de C^* -algèbres $s^* : C_0(X) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ est injectif et non dégénéré. En appliquant la proposition 3.5, l'application $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$ est continue, propre et surjective. \square

Proposition 3.16. *L'espace topologique $\beta_X \mathcal{G}$ est localement compact et muni d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} .*

Démonstration. L'espace topologique $\beta_X \mathcal{G}$ étant défini comme le spectre de la C^* -algèbre C_0^s , il est donc localement compact.

On a montré auparavant l'existence d'une application $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$ continue, propre, surjective et ouverte. On pose alors

$$\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G} = \bigsqcup_{x \in X} \widehat{C_0^s(x)} *_r \mathcal{G} := \left\{ (\chi, \gamma) \in \bigsqcup_{x \in X} \widehat{C_0^s(x)} \times \mathcal{G} : \tilde{s}(\chi) = r(\gamma) \right\}$$

Pour (χ, γ) dans $\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G}$, la relation $\tilde{s}(\chi) = r(\gamma)$ implique que χ est dans $\widehat{C_0^s(r(\gamma))}$.

On pose $\phi : \beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G} \rightarrow \beta_X \mathcal{G}$ une application telle que, pour tout couple (χ, γ) dans $\beta_X \mathcal{G} *_r \mathcal{G}$, on a $\phi(\chi, \gamma) := \chi \cdot \gamma$ où $\chi \cdot \gamma \in C_0^s(s(\gamma))$ est tel que

$$\forall f \in C_0^s(s(\gamma)), \quad \chi \cdot \gamma(f) := \chi(\alpha_\gamma(f))$$

On obtient donc une action à droite continue du groupoïde \mathcal{G} sur l'espace $\beta_X \mathcal{G}$. \square

La fin de cette partie consiste à démontrer que l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ est un espace universel pour la propriété suivante :

Proposition 3.17. *Soit Z un \mathcal{G} -espace localement compact pour lequel l'application $\pi : Z \rightarrow X$ est continue, propre, surjective et admet une section continue (qui n'est pas nécessairement \mathcal{G} -équivariante) $\sigma : X \rightarrow Z$, alors il existe une application $\theta : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ continue, \mathcal{G} -équivariante et propre.*

Soit Z un \mathcal{G} -espace localement compact pour lequel l'application $\pi : Z \rightarrow X$ est continue, propre, surjective et admet une section continue (non nécessairement \mathcal{G} -équivariante) notée $\sigma : X \rightarrow Z$. On pose $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$ l'application définie pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ par

$$\theta(\gamma) := \sigma(r(\gamma)) \cdot \gamma$$

Cette application est bien définie car pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, on a $\sigma(r(\gamma)) \in Z_{r(\gamma)}$, et en appliquant l'action de γ sur $\sigma(r(\gamma))$, on obtient bien $\sigma(r(\gamma)) \cdot \gamma$ un élément de $Z_{s(\gamma)}$.

L'application θ est continue car composée d'applications continues et \mathcal{G} -équivariante car pour toute paire (γ_1, γ_2) de $\mathcal{G}^{(2)}$, on a

$$\begin{aligned} \theta(\gamma_1 \gamma_2) &= \sigma(r(\gamma_1 \gamma_2)) \cdot (\gamma_1 \gamma_2) \\ &= (\sigma(r(\gamma_1)) \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \\ &= \theta(\gamma_1) \cdot \gamma_2 \end{aligned}$$

Pour γ dans \mathcal{G} , on a $\theta(\gamma) = \sigma(r(\gamma)).\gamma$ est dans le sous espace $Z_{s(\gamma)} := \pi^{-1}(s(\gamma))$ compact dans Z .

Lemme 3.18. *L'application continue $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$ induit un homomorphisme de C^* -algèbres $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$.*

Démonstration. L'application $\theta : \mathcal{G} \rightarrow Z$ induit un homomorphisme de C^* -algèbres $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_b(\mathcal{G})$ défini par

$$\theta^*(f)(\gamma) := f \circ \theta(\gamma) = f(\sigma(r(\gamma)).\gamma)$$

pour toute fonction f de $C_0(Z)$ et tout γ de \mathcal{G} .

Soient une fonction f dans $C_0(Z)$ et $\varepsilon > 0$, il existe alors un sous espace compact K_ε dans Z tel que $|f(z)| < \varepsilon$ pour tout z en dehors de K_ε .

En posant $K'_\varepsilon := \pi(K_\varepsilon)$, on obtient un sous espace compact de X et pour tout γ n'appartenant pas à l'espace $\mathcal{G}_{K'_\varepsilon}$, l'élément $\theta(\gamma) = \sigma(r(\gamma)).\gamma$ se trouve en dehors de K_ε , par conséquent

$$|\theta^*(f)(\gamma)| = |f(\sigma(r(\gamma)).\gamma)| < \varepsilon$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace K'_ε compact dans X tel que pour tout γ dans \mathcal{G} avec $s(\gamma) \notin K'_\varepsilon$, on a $|\theta^*(f)(\gamma)| < \varepsilon$. Donc $\theta^*(f)$ est dans C_0^s . On obtient alors un homomorphisme de C^* -algèbre, $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$. □

Lemme 3.19. *L'homomorphisme $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$ est \mathcal{G} -équivariant.*

Démonstration. Les C^* -algèbres $C_0(Z)$ et C_0^s sont des \mathcal{G} -algèbres dont les actions sont données par les familles d'isomorphismes C^* -algèbres $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ avec $\delta_\gamma : C_0(Z)(s(\gamma)) \rightarrow C_0(Z)(r(\gamma))$ et $(\rho_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$, avec $\rho_\gamma : C_0^s(s(\gamma)) \rightarrow C_0^s(r(\gamma))$.

Pour tout x dans X , on pose $\theta_x^* : C_0(Z)(x) \rightarrow C_0^s(x)$ l'homomorphisme de C^* -algèbres induit par $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$ sur les fibres en x .

On a pour toute fonction g de $C_0(Z)(r(\gamma))$ et tout η dans $\mathcal{G}_{r(\gamma)}$

$$\begin{aligned} \rho_\gamma \circ \theta_{r(\gamma)}^*(g)(\eta) &= \rho_\gamma(\theta_{r(\gamma)}^*(g))(\eta) = \theta_{r(\gamma)}^*(g)(\eta.\gamma) = g(\theta(\eta.\gamma)) \\ &= g(\theta(\eta).\gamma) = \delta_\gamma(g)(\theta(\eta)) \\ &= \theta_{s(\gamma)}^* \circ \delta_\gamma(g)(\eta) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout γ de \mathcal{G} , on a $\rho_\gamma \circ \theta_{r(\gamma)}^* = \theta_{s(\gamma)}^* \circ \delta_\gamma$, par conséquent, l'homomorphisme $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0^s$ est \mathcal{G} -équivariant. □

Démonstration de la propriété 3.17. En étudiant la C^* -algèbre C_0^s , on a montré qu'il existe un $*$ -isomorphisme isométrique de C_0^s dans $C_0(\beta_X \mathcal{G})$. On obtient un homomorphisme de C^* -algèbres $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$.

On considère $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité de $C_0(Z)$ et on veut montrer que $(\theta^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité de $C_0(\beta_X \mathcal{G})$. Soit f une fonction dans $C_0(\beta_X \mathcal{G})$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace K compact dans X , tel que pour tout γ dans $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_K$, on a $|f(\gamma)| < \varepsilon$. En posant $K' := \overline{\{\sigma(r(\gamma)).\gamma \mid s(\gamma) \in K\}} \subset \pi^{-1}(K)$, on obtient un sous espace compact de Z . Il existe n_0 dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

pour tout z dans $\pi^{-1}(K)$ $1 \leq e_n(z) \leq 1 - \varepsilon$. Par conséquent, on a pour tout γ dans \mathcal{G}_K , $1 \leq \theta^*(e_n)(\gamma) \leq 1 - \varepsilon$ ce qui implique

$$|f(\gamma) - \theta^*(e_n)(\gamma)f(\gamma)| \leq \varepsilon |f(\gamma)|$$

De même, pour $n \geq n_0$ pour γ n'appartenant pas à \mathcal{G}_K , puisque $|f(\gamma)| \leq \varepsilon$ et $\theta^*(e_n)(\gamma) \in [0, 1]$, on a

$$|f(\gamma) - \theta^*(e_n)(\gamma)f(\gamma)| < \varepsilon$$

Ainsi on a montré que pour f fonction de $C_0(\beta_X \mathcal{G})$, pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans \mathbb{N} tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\|f - \theta^*(e_n)f\|_\infty < \varepsilon \|f\|_\infty$$

On en conclut que $(\theta^*(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité de $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ et l'homomorphisme $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ est non dégénéré.

D'après la proposition 3.4, l'homomorphisme non dégénéré $\theta^* : C_0(Z) \rightarrow C_0(\beta_X \mathcal{G})$ induit une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$.

L'application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ est continue : en effet, on considère U un ouvert de Z et on pose $V = \tilde{\theta}^{-1}(U)$. Si V est vide, alors c'est un ouvert de $\beta_X \mathcal{G}$. S'il existe p_0 dans V , on pose $z_0 = \tilde{\theta}(p_0)$, son image dans U . Soit f une fonction de $C_0(Z)$ à valeurs dans $[0, 1]$, à support dans U et pour laquelle $f(z_0) = 1$. La fonction $\theta^*(f)$ de $C_0(\beta_X \mathcal{G})$ est à valeurs dans $[0, 1]$, non nulle car $\theta^*(f)(p_0) = 1$ et à support dans V . On a alors $\theta^*(f)^{-1}([0, 1])$ est un ouvert dans $\beta_X \mathcal{G}$ contenant p_0 et contenu dans V . Donc $V = \tilde{\theta}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\beta_X \mathcal{G}$. L'application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ est continue.

L'application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow Z$ est \mathcal{G} -équivariante : en effet pour tout élément (p, γ) dans $\beta_X \mathcal{G} *_{\tilde{s}, r} \mathcal{G}$ et toute fonction f dans $C_0(Z)$, on a

$$\begin{aligned} f(\tilde{\theta}(p.\gamma)) &= \theta^*(f)(p.\gamma) = \theta_{r(\gamma)}^*(f)(p.\gamma) = \rho_\gamma(\theta_{r(\gamma)}^*(f))(p) \\ &= \theta_{s(\gamma)}^*(\delta_\gamma(f))(p) = \delta_\gamma(f)(\tilde{\theta}(p)) = f(\tilde{\theta}(p).\gamma) \end{aligned}$$

Pour tout couple (p, γ) dans $\beta_X \mathcal{G}$, on a l'égalité $\tilde{\theta}(p.\gamma) = \tilde{\theta}(p).\gamma$, ce qui prouve que l'application $\tilde{\theta}$ est \mathcal{G} -équivariante.

Soit K un sous espace compact de Z , montrons que $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ est un sous espace compact de $\beta_X \mathcal{G}$. Le sous espace $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ est fermé dans $\beta_X \mathcal{G}$ et $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ est inclus dans $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$ car pour tout p dans $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ il existe z dans K tel que :

$$\tilde{\theta}(p) = z \quad \text{et} \quad \tilde{s}(p) = \pi(\tilde{\theta}(p))$$

donc $p \in \tilde{s}^{-1}(\pi(K))$. Or l'application π étant continue et l'application \tilde{s} étant propre, alors $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$ est un sous espace compact de $\beta_X \mathcal{G}$. On en déduit que $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ est un sous espace fermé du compact $\tilde{s}^{-1}(\pi(K))$, donc $\tilde{\theta}^{-1}(K)$ est compact. L'application $\tilde{\theta}$ est donc propre. □

3.4. Espace de mesure. La moyennabilité à l'infini du groupoïde \mathcal{G} se caractérise par l'existence d'un \mathcal{G} -espace localement compact et séparé Y tel que $\pi : Y \rightarrow X$ une application continue, propre, surjective et ouverte pour lequel l'action est moyennable. Pour démontrer le théorème 3.1, à savoir que la moyennabilité infinie du groupoïde \mathcal{G} implique la moyennabilité du groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$, l'outil essentiel est la propriété universelle de $\beta_X \mathcal{G}$. Le premier réflexe serait d'appliquer cette propriété universelle au \mathcal{G} -espace Y mais ceci n'est pas possible car l'application $\pi : Y \rightarrow X$ n'admet en général pas de section continue.

L'objectif de cette partie et de la suivante vise à remplacer l'espace Y par un \mathcal{G} -espace M de mesures de probabilité sur Y judicieusement choisi de sorte que l'espace M possède les mêmes caractéristiques que l'espace Y et que l'on puisse construire une section continue pour l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ induite par l'action de \mathcal{G} .

Dans cette partie, on s'emploie tout d'abord à définir l'espace M de mesures sur Y puis on montre que l'espace M est muni d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} pour lequel l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est continue, surjective, ouverte et propre.

Pour tout $x \in X$, on note $Y_x = \pi^{-1}(x)$. On note $R(Y)$ l'espace des mesures de Radon sur Y . On pose alors

$$M = \{ \mu \in R(Y) : \exists x \in X, \text{Supp}(\mu) \subset Y_x \text{ et } \mu(Y) = 1 \}$$

L'ensemble M est un sous espace de la boule unité de l'espace $R(Y)$. Pour toute mesure μ dans M , il existe un unique x_μ dans X tel que $\text{Supp}(\mu)$ est inclus dans Y_{x_μ} . On note $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ l'application canonique qui à toute mesure μ de M associe l'élément $\tilde{\pi}(\mu) = x_\mu$ de X .

Proposition 3.20. *L'application canonique $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est continue, surjective, ouverte et propre.*

Démonstration. On montre successivement que l'application est surjective, continue, ouverte et propre.

La surjectivité est assez directe : pour toute mesure $\mu \in M$, il existe $x_\mu \in X$ tel que $\text{Supp} \mu \subset Y_{x_\mu}$. L'application canonique $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est définie par $\tilde{\pi}(\mu) = x_\mu$. Elle est clairement surjective.

Pour montrer la continuité de l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$, on considère U un ouvert dans X et on cherche à montrer que $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ est un ouvert de M ; soit μ_0 un élément de $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ et $x_0 := \tilde{\pi}(\mu_0)$. Soit U_0 un ouvert dans U contenant x_0 ; puisque l'application $\pi : Y \rightarrow X$ est continue alors $\pi^{-1}(U_0)$ est un ouvert de Y ; soit $f \in C_c(\pi^{-1}(U_0))$ une fonction continue à support compact dans $\pi^{-1}(U_0)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $f|_{Y_{\mu_0}} \equiv 1$. Alors l'ensemble

$$\{ \mu \in M : |\mu(f) - \mu_0(f)| < 1 \}$$

est un ouvert dans $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ contenant μ_0 . Ainsi $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ est un ouvert de M . L'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est donc continue.

Supposons maintenant que l'application $\tilde{\pi}$ n'est pas ouverte c'est-à-dire qu'il existe un ouvert U_0 de M tel que $\tilde{\pi}(U_0)$ n'est pas ouvert dans X . On peut supposer que U_0 est un voisinage ouvert de μ_0 de la forme

$$U_0 = \{\mu \in M : |\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < a, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

avec a un réel strictement positif et f_i est une fonction dans $C_0(Y)$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$. Comme $\tilde{\pi}(U_0)$ n'est pas ouvert dans X , il existe alors une mesure μ' dans U_0 avec $x' = \tilde{\pi}(\mu')$ tel que pour tout voisinage V' de x' dans X , on a $V' \not\subseteq \tilde{\pi}(U_0)$. On peut donc construire une suite généralisée $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans X qui converge vers x' et telle que pour tout λ dans Λ , l'élément x_λ n'est pas dans $\tilde{\pi}(U_0)$, c'est-à-dire pour tout μ_λ dans $\tilde{\pi}^{-1}(x_\lambda)$, il existe i dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $|\mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \geq a$.

On considère ε un réel strictement positif tel que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on a

$$|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| < a - 2\varepsilon$$

Pour tout z dans $Y_{x'}$, on pose

$$U_z = \cap_{i=1}^n \{y \in Y : |f_i(y) - f_i(z)| < \varepsilon\}$$

qui est un ouvert de z dans Y . On obtient un recouvrement d'ouverts du compact $Y_{x'}$ duquel on peut extraire un sous recouvrement fini et on a $Y_{x'} \subset \cup_{j=1}^m U_{z_j}$.

L'application $\pi : Y \rightarrow X$ étant ouverte, l'espace $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$ est un ouvert de X contenant x' . Ainsi il existe $\lambda' \in \Lambda$, tel que pour tout $\lambda > \lambda'$, on a x_λ appartient à l'ouvert $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$. On pose $(\phi_j)_{1 \leq j \leq m}$, une partition de l'unité associée au recouvrement de l'espace $Y_{x'}$ par les ouverts $\{U_{z_j}\}_{j=1}^m$.

On considère x_λ dans $\cap_{j=1}^m \pi(U_{z_j})$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe y_j dans $U_{z_j} \cap Y_{x_\lambda}$ et on construit une mesure μ_λ définie par $\mu_\lambda = \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_{y_j}$, où δ_j est la mesure de Dirac en y_j et $\omega_j = \mu'(\phi_j)$. On obtient une mesure à support dans Y_{x_λ} et comme

$$\mu_\lambda(Y) = \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_j(M) = \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) = \mu'(\sum_j \phi_j) = \mu'(1_{Y_{x'}}) = 1$$

la mesure μ_λ est dans l'espace M . Pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} |\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| &= \left| \sum_{j=1}^m \omega_j \delta_j(f_i) - \mu\left(\sum_{j=1}^m \phi_j f_i\right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) f_i(y_j) - \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) f_i(z_j) \right| \end{aligned}$$

et, pour tout $1 \leq j \leq m$, on a $(f_i(y_j) - \varepsilon)\phi_j \leq \phi_j f_j \leq (f_i(y_j) + \varepsilon)\phi_j$.

Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) [f_i(z_j) - (f_i(y_j) + \varepsilon)] \leq \mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i) \leq \sum_{j=1}^m \mu'(\phi_j) [f_i(z_j) - (f_i(y_j) - \varepsilon)]$$

Par définition des ouverts U_j construits, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on a

$$-\varepsilon \leq f_i(z_j) - f_i(y_j) \leq \varepsilon$$

On en déduit alors que pour tout $\lambda \geq \lambda'$, pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$ et tout i dans $\{1, \dots, n\}$,

$$|\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi on a pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, tout réel ε strictement positif, il existe λ' dans Λ tel que

$$\begin{aligned} |\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| &= |\mu'(f_i) - \mu_\lambda(f_i) + \mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \\ &\geq \left| |\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| - |\mu_\lambda(f_i) - \mu_0(f_i)| \right| \\ &\geq a - 2\varepsilon \end{aligned}$$

On obtient alors une contradiction. L'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est donc ouverte.

Montrons maintenant que l'application est propre : l'espace M est un sous espace fermé de $R(Y)$ pour la topologie $*\sigma(R(Y), C_0(Y))$. En effet, soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesure dans M qui converge vers une mesure μ de $R(Y)$ pour la topologie $*\sigma(R(Y), C_0(Y))$. On note S le support de μ qui est non vide (car μ est dans la boule unité de $R(Y)$) et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dans X où, pour tout entier n , on a $x_n = \tilde{\pi}(\mu_n)$. Soit x un élément de $\tilde{\pi}(S)$, alors x est dans l'adhérence de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposons (on raisonne par l'absurde) qu'il existe deux éléments x et x' distincts dans $\tilde{\pi}(S)$. On considère U et U' des voisinages ouverts et disjoints respectivement de x et x' . On considère f (respectivement f') une fonction à support compact dans l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ (respectivement $\pi^{-1}(U')$) telle que $\mu(f) = 1$ (respectivement $\mu(f') = 1$). Pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a

$$|\mu(f) - \mu_n(f)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\mu(f') - \mu_n(f')| < \varepsilon$$

Pour tout $n > n_0$, l'espace $\text{Supp}(\mu_n)$ est contenu dans $\pi^{-1}(x_n)$. L'espace $\pi^{-1}(x_n)$ est inclus dans $\pi^{-1}(U)$ et dans $\pi^{-1}(U')$, ce qui est contradictoire. Donc $\tilde{\pi}(S)$ est réduit à un singleton $\{x\}$ dans X et μ est dans M . L'espace M est fermé dans la boule unité de $R(Y)$ qui est compacte par le théorème de Banach-Alaoglu. L'espace M est donc compact et l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est propre. □

Proposition 3.21. *L'espace topologique M est un \mathcal{G} -espace localement compact.*

Démonstration. L'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ étant propre, l'espace M est alors localement compact. On munit M d'une action du groupoïde \mathcal{G} : on considère l'espace $M * \mathcal{G}$ comme étant l'ensemble $\{(\mu, \gamma) \in M \times \mathcal{G} : \tilde{\pi}(\mu) = r(\gamma)\}$ et on note $\theta : M * \mathcal{G} \rightarrow M$ l'application qui à tout (μ, γ) de $M * \mathcal{G}$, associe $\theta((\mu, \gamma)) = \mu \cdot \gamma \in M$ où $\mu \cdot \gamma$ est définie pour toute fonction f dans $C_0(Y)$ par

$$\mu \cdot \gamma(f) = \int_Y f(y) d\mu \cdot \gamma(y) = \int_{Y_{s(\gamma)}} f(y) d\mu \cdot \gamma(y) = \int_{Y_{r(\gamma)}} f(z\gamma) d\mu(z)$$

On obtient bien une mesure de probabilité et comme $\tilde{\pi}(\mu \cdot \gamma) = s(\gamma)$, le support de $\mu \cdot \gamma$ est un sous espace de $Y_{s(\gamma)}$. Ainsi pour tout élément (μ, γ) dans $M * \mathcal{G}$, la mesure de

probabilité $\mu \cdot \gamma$ est dans l'espace M .

De plus, pour tout (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$ et toute fonction f dans $C_0(Y)$, on a

$$\begin{aligned} (\mu \cdot \gamma \eta)(f) &= \int_{Y_{s(\eta)}} f(y) d(\mu \cdot \gamma \eta)(y) = \int_{Y_{r(\gamma)}} f(z \gamma \eta) d\mu(z) \\ &= \int_{Y_{r(\eta)}} f(z \eta) d\mu \cdot \gamma(z) = \int_{Y_{s(\eta)}} f(y) d(\mu \cdot \gamma) \cdot \eta(y) \\ &= (\mu \cdot \gamma) \cdot \eta(f) \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $\mu \in M$ tel que $\tilde{\pi}(\mu) = x$ et toute fonction $f \in C_0(Y)$, on a

$$\mu \cdot \tilde{\pi}(\mu)(f) = \int_{Y_x} f(y) d\mu \cdot \varepsilon(x)(y) = \int_{Y_x} f(y \varepsilon(x)) d\mu(y) = \mu(f)$$

Ainsi on a muni l'espace localement compact M d'une action du groupoïde \mathcal{G} .

L'action est continue si l'application (induite par l'action) $M *_{\tilde{\pi}, r} \mathcal{G} \rightarrow M$ est continue. On considère une suite $(\mu_i)_{i \in I}$ de mesures dans M convergeant vers une mesure μ dans M . Pour tout i dans I , on note $x_i := \tilde{\pi}(\mu_i)$ et $x := \tilde{\pi}(\mu)$ et on a une suite $(x_i)_{i \in I}$ dans X qui converge vers x . On considère une suite $(\gamma_i)_{i \in I}$ dans \mathcal{G} telle que pour tout i dans I , γ_i est dans \mathcal{G}^{x_i} et qui converge vers un élément γ dans \mathcal{G}^x . On montre que la suite $(\mu_i \cdot \gamma_i)_{i \in I}$ converge dans M vers $\mu \cdot \gamma$.

On considère U un voisinage ouvert de γ dans \mathcal{G} tel que les applications but et source sont des homéomorphismes sur leur image respective. On note $\rho_x : r(U) \rightarrow U$ l'homéomorphisme inverse de la restriction $r : U \rightarrow r(U)$.

On considère V un voisinage ouvert de $\mu \cdot \gamma$ dans M que l'on peut supposer de la forme

$$V = \{\mu \in M : |\mu(f_j) - \mu \cdot \gamma(f_j)| < \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$$

où ε est un réel strictement positif et pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$, f_j est une fonction dans $C_0(Y)$ telle que $\text{Supp}(f_j)$ est inclus dans l'ouvert $\pi^{-1}(s(U))$. Pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$, on note \tilde{f}_j la fonction de $C_0(Y)$ obtenue par l'action de γ sur f_j telle que le support $\text{Supp}(\tilde{f}_j)$ est inclus dans $\pi^{-1}(r(U))$. On note \tilde{V} le voisinage ouvert de μ dans M défini par

$$\tilde{V} := \{\mu' \in M : |\mu'(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon, \forall j \in \{1, \dots, m\}\}$$

et la suite $(\mu_i)_{i \in I}$ convergeant vers μ , il existe i_ε dans I tel que pour tout $i \geq i_\varepsilon$, l'élément γ_i est dans U et on a, pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$,

$$|\mu_i(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon$$

Or on a pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{f}_j) &= \int_Y \tilde{f}_j(y) d\mu(y) = \int_{Y_x} \tilde{f}_j(y) d\mu(y) = \int_{Y_x} f_j(y \cdot \rho_x(\pi(y))) d\mu(y) \\ &= \int_{Y_x} f_j(y \cdot \gamma) d\mu(y) = \int_{Y_{s(\gamma)}} f_j(z) d(\mu \cdot \gamma)(z) = \int_Y f_j(z) (\mu \cdot \gamma)(z) \\ &= (\mu \cdot \gamma)(f_j) \end{aligned}$$

On obtient de même pour tout $i \geq i_\varepsilon$ dans I et tout j dans $\{1, \dots, m\}$, l'égalité

$$\mu_i(\tilde{f}_j) = \mu_i \cdot \gamma_i(f_j)$$

Ainsi pour tout $i \geq i_\varepsilon$, on a, pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$

$$|\mu_i \cdot \gamma_i(f_j) - \mu \cdot \gamma(f_j)| = |\mu_i(\tilde{f}_j) - \mu(\tilde{f}_j)| < \varepsilon$$

donc $\mu_i \cdot \gamma_i$ est dans l'ouvert V pour tout $i \geq i_\varepsilon$. L'action du groupoïde \mathcal{G} sur M est continue. □

3.5. Existence d'une section continue. Pour démontrer que l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ continue, surjective, propre et ouverte possède une section continue (non nécessairement équivariante), on utilise le théorème de sélection de Michael [Mic56] dont on donne un rappel succinct pour la commodité du lecteur.

On considère A et B deux espaces topologiques (A étant supposé séparé) et on note 2^B l'ensemble des parties non vides de B . On considère $\Omega : A \rightarrow 2^B$ une application qui sera dite semi-continue inférieurement si, pour tout ouvert V de B , l'ensemble $\{a \in A : \Omega(a) \cap V \neq \emptyset\}$ est un ouvert de A .

Définition 3.22. Soit A et B des espaces topologiques et $\Omega : A \rightarrow 2^B$ une application. On appelle sélection pour l'application Ω une application continue $f : A \rightarrow B$ telle que, pour tout a dans A , l'élément $f(a)$ est dans $\Omega(a)$.

On considère à partir de maintenant que B est un espace de Banach et on note dans la suite de cette sous section $\mathfrak{F}(B) := \{S \subset B : S \text{ convexe et fermée}\}$ qui est une sous famille de 2^B . Michael donne alors une caractérisation des applications $\Omega : A \rightarrow \mathfrak{F}(B)$ qui admettent une sélection par le théorème qui suit :

Théorème 3.23 ([Mic56]). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) A est un espace paracompact
- b) toute application $\Omega : A \rightarrow \mathfrak{F}(B)$ semi-continue inférieurement admet une sélection.

Remarque 3.24. L'intérêt d'introduire l'espace M réside dans le fait que l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est continue, surjective, propre et ouverte, comme le prouve la proposition 3.20. L'espace des mesures de Radon $R(Y)$ étant un espace de Banach, on va, par le théorème de sélection de Michael 3.23, en déduire l'existence d'une section continue de $\tilde{\pi}$. En munissant l'espace M d'une structure de \mathcal{G} -espace localement compact, on peut ainsi appliquer la propriété universelle de l'espace $\beta_X \mathcal{G}$ et définir une application continue et \mathcal{G} -équivariante $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$.

Proposition 3.25. L'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ continue, surjective, propre et ouverte admet une section continue (non nécessairement \mathcal{G} -équivariante).

Démonstration. Il s'agit de réunir les conditions pour appliquer le théorème de sélection de Michael 3.23. L'espace M est un sous espace de l'espace des mesures de Radon $R(Y)$ qui est un espace de Banach. Pour tout x dans X , on note $M_x := \tilde{\pi}^{-1}(\{x\})$ et on a $M = \{M_x\}_{x \in X}$ qui est une sous famille de $2^{R(Y)}$. On voit clairement que pour tout x dans X , l'espace M_x est fermé et convexe et M est donc une sous famille de $\mathfrak{F}(R(Y))$. On pose $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$ l'application définie, pour tout x dans X , par $\Omega(x) = M_x$. Pour montrer que l'application $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$ est semi-continue inférieurement, on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un ouvert V dans $R(Y)$ pour lequel l'ensemble $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$ n'est pas ouvert dans X . On peut supposer qu'il existe a un réel strictement positif, μ_0 dans $R(Y)$ et une famille $(f_i)_{i=1}^m$ de fonctions dans $C_c(Y)$ tels que V est de la forme

$$\{\mu \in R(Y) : |\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < a, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

L'espace $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$ étant supposé non ouvert dans X (et donc non vide), il existe x' dans X et μ' dans $M \cap V$ avec $\tilde{\pi}(\mu') = x'$, tels que pour tout voisinage ouvert U' de x' dans X , U' n'est pas contenu dans $\{x \in X : \Omega(x) \cap V \neq \emptyset\}$.

On considère ε un réel dans $]0, a/2[$, vérifiant, pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$, l'inégalité

$$|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| < a - 2\varepsilon$$

On applique un raisonnement similaire à celui de la démonstration de 3.20 et on construit alors

- une suite généralisée $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergeant dans X vers x' tel que pour tout λ dans Λ , l'intersection de M_{μ_λ} avec V est vide
- un recouvrement ouvert fini $\{U_{z_j}\}_{j=1}^n$ de $Y_{x'}$ pour lequel il existe λ_n dans Λ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_n$, l'élément x_λ est dans $\cap_{j=1}^n \pi(U_{z_j})$.
- pour $\lambda > \lambda_1$, une mesure μ_λ dans M_{x_λ} telle que pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$, on a $|\mu_\lambda(f_i) - \mu'(f_i)| \leq 2\varepsilon$

On aboutit alors à la contradiction $|\mu'(f_i) - \mu_0(f_i)| \geq a - 2\varepsilon$. Donc l'application $\Omega : X \rightarrow \mathfrak{F}(R(Y))$ est semi-continue inférieurement. L'espace X étant paracompact, l'application Ω admet une sélection et il existe donc une section continue de l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ que l'on note $\sigma : X \rightarrow M$.

□

Le \mathcal{G} -espace localement compact et séparé M satisfaisant les conditions de la propriété universelle, on obtient alors la proposition suivante :

Proposition 3.26. *Il existe une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ continue, propre et \mathcal{G} -équivariante.*

Démonstration. D'après 3.21, l'espace M est un \mathcal{G} -espace localement compact. D'après 3.20 et 3.25 l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow Z$ est continue, surjective, propre et admet une section continue $\theta : X \rightarrow M$. Les conditions de la proposition 3.17 étant réunies, il existe une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ continue, propre et \mathcal{G} -équivariante.

□

3.6. Moyennabilité. La moyennabilité à l'infini du groupoïde \mathcal{G} se caractérise par l'existence d'un \mathcal{G} -espace localement compact et séparé Y tel que $\pi : Y \rightarrow X$ une application continue, propre, surjective et ouverte pour lequel l'action est moyennable. On a construit à l'aide de mesures de probabilité sur Y le \mathcal{G} -espace localement compact M pour lequel l'application $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ est continue, surjective, propre et admet une section continue (non nécessairement équivariante). La proposition 3.26 donne l'existence d'une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ continue, propre et \mathcal{G} -équivariante.

Dans cette partie, on commence par prouver que la moyennabilité du groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ implique celle du groupoïde $M \rtimes \mathcal{G}$. Une fois la moyennabilité de $M \rtimes \mathcal{G}$ établie, on s'attaque à la démonstration du théorème 3.1 : on va énoncer deux lemmes 3.29 et 3.30, qui nous permettront de "tiré en arrière" la moyennabilité de $M \rtimes \mathcal{G}$ sur $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ en utilisant entre autre l'application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$.

Remarque 3.27. On considère Y' un sous espace de Y et \mathcal{G}' un sous espace de \mathcal{G} . On note $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}'$ le sous espace de $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$ défini par $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}' := \{(y, \gamma) \in Y' \times \mathcal{G}' : \pi(y) = r(\gamma)\}$. Si les espaces Y' et \mathcal{G}' sont compacts respectivement dans Y et \mathcal{G} , alors l'espace $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}'$ est compact dans $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$; en effet, l'espace $Y' \times \mathcal{G}'$ est compact dans $Y \times \mathcal{G}$, l'espace $Y *_{\pi,r} \mathcal{G}$ est fermé dans $Y \times \mathcal{G}$ et on a $Y' *_{\pi,r} \mathcal{G}' = (Y' \times \mathcal{G}') \cap (Y *_{\pi,r} \mathcal{G})$.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.28. *Si $Y \rtimes \mathcal{G}$ est un groupoïde moyennable, alors $M \rtimes \mathcal{G}$ est un groupoïde moyennable.*

Démonstration. On suppose que $Y \rtimes \mathcal{G}$ est un groupoïde moyennable c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\phi_i)_{i \in I}$ de fonctions continues, de type positif et à support compact dans $Y \rtimes \mathcal{G}$ telle que

- $\forall i \in I, \phi_i^{(0)} \leq 1$ où $\phi_i^{(0)}$ est la restriction de ϕ_i à $(Y \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$
- $\lim_i \phi_i = 1$ uniformément sur tout sous espace compact de $Y \rtimes \mathcal{G}$

Pour tout i dans I , on pose ψ_i la fonction définie, pour tout (μ, γ) dans $M \rtimes \mathcal{G}$, par

$$\psi_i(\mu, \gamma) := \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y)$$

On obtient ainsi une suite de fonctions $(\psi_i)_{i \in I}$ définie sur $M \rtimes \mathcal{G}$ et on montre successivement que les fonctions ψ_i sont continues, de type positif, à support compact et qu'elles vérifient un critère de convergence uniforme sur les compacts ce qui implique la moyennabilité du groupoïde $M \rtimes \mathcal{G}$.

On prouve tout d'abord la continuité des fonctions ψ_i : soit i dans I et (μ_0, γ_0) un élément de $M \rtimes \mathcal{G}$. Le groupoïde \mathcal{G} étant étale et localement compact, on considère U_0 un voisinage ouvert de γ_0 homéomorphe à l'ouvert $s(U_0)$ de X et K_0 un voisinage compact de γ_0 inclus dans U_0 . Il existe une fonction continue φ à support dans U_0 telle que $\varphi|_{K_0} \equiv 1$.

On définit une fonction $\tilde{\phi}_i$ sur Y par

$$\tilde{\phi}_i(y) = \begin{cases} \varphi(\gamma)\phi_i(y, \gamma), & \text{si } y \in \pi^{-1}(r(U_0)), \gamma \in U_0 \\ 0, & \text{si } y \notin \pi^{-1}(r(U_0)) \end{cases}$$

qui est continue sur Y . On a, pour tout (μ, γ) dans $M *_{\tilde{\pi}, r} U_0$,

$$\begin{aligned} |\psi_i(\mu, \gamma) - \psi_i(\mu_0, \gamma_0)| &= \left| \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y) - \int_Y \phi_i(y, \gamma_0) d\mu_0(y) \right| \\ &= \left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| \end{aligned}$$

Soit $((\mu_\lambda, \gamma_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ une suite d'éléments de $M \rtimes \mathcal{G}$ qui converge vers (μ_0, γ_0) . Pour tout réel ε strictement positif, il existe V_0 un voisinage ouvert de μ_0 dans M tel que, pour tout μ dans V_0 , on a

$$\left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| < \varepsilon$$

Ainsi il existe λ' dans Λ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda'$, l'élément $(\mu_\lambda, \gamma_\lambda)$ est dans $V_0 *_{\tilde{\pi}, r} U_0$ et donc

$$|\psi_i(\mu_\lambda, \gamma_\lambda) - \psi_i(\mu_0, \gamma_0)| = \left| \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_\lambda(y) - \int_Y \tilde{\phi}_i(y) d\mu_0(y) \right| < \varepsilon$$

Ainsi pour tout i dans I , la fonction ψ_i est continue sur $M \rtimes \mathcal{G}$.

On montre que les fonctions ψ_i sont de type positif : pour tout i dans I , la fonction ψ_i est de type positif : soient n dans \mathbb{N} , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{C} , μ dans M et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans $\mathcal{G}^{\tilde{\pi}(\mu)}$, on a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,q=1}^n \overline{\lambda_p} \lambda_q \psi_i(\mu \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) = \sum_{p,q=1}^n \overline{\lambda_p} \lambda_q \int_{Y_{s(\gamma_p)}} \phi_i(y, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu \cdot \gamma_p(y) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \int_{Y_{r(\gamma_p)}} \overline{\lambda_p} \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu(z) \\ &= \int_{Y_{r(\gamma_p)}} \sum_{p,q=1}^n \overline{\lambda_p} \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) d\mu(z) \geq 0 \end{aligned}$$

car chaque fonction ϕ_i est de type positif donc $\sum_{p,q=1}^n \overline{\lambda_p} \lambda_q \phi_i(z \cdot \gamma_p, \gamma_p^{-1} \gamma_q) \geq 0$. Pour tout i de I , la fonction ψ_i est de type positif.

On montre maintenant que les fonctions ψ_i sont à support compact : soit $i \in I$, on pose $K_i := \text{Supp}(\psi_i)$. La fonction ϕ_i étant à support compact, l'espace $Q_i := \text{Supp}(\phi_i)$ est un sous espace compact de $Y \rtimes \mathcal{G}$; les projections $p_1 : Y \rtimes \mathcal{G} \rightarrow Y$ et $p_2 : Y \rtimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ étant continues, les espaces $p_1(Q_i)$ et $p_2(Q_i)$ sont compacts respectivement dans Y et \mathcal{G} et $C_i := \pi(p_1(Q_i)) = r(p_2(Q_i))$ est un sous espace compact de X ; d'après la remarque 3.27, $\tilde{\pi}^{-1}(C_i) *_{\tilde{\pi}, r} p_2(Q_i)$ est compact dans $M \rtimes \mathcal{G}$. Le support de ψ_i est donc un fermé contenu dans le sous espace compact $\tilde{\pi}^{-1}(C_i) \rtimes p_2(Q_i)$. Pour tout i dans I , la fonction

ψ_i est à support compact dans $M \rtimes \mathcal{G}$.

On montre le critère de convergence uniforme : soit K un sous espace compact de $M \rtimes \mathcal{G}$, alors on a pour tout (μ, γ) dans K

$$\begin{aligned} |\psi_i(\mu, \gamma) - 1| &= \left| \int_Y \phi_i(y, \gamma) d\mu(y) - 1 \right| = \left| \int_Y (\phi_i(y, \gamma) - 1) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_Y |\phi_i(y, \gamma) - 1| d\mu(y) \end{aligned}$$

On pose $p_1(K)$ l'image de K par la première projection sur M . L'espace $p_1(K)$ est un sous espace compact de M et $\tilde{\pi}(p_1(K))$ est un sous espace compact de X . Pour (μ, γ) dans K , il existe x dans $\tilde{\pi}(p_1(K))$ tel que $Supp(\mu) \subset Y_x$ et on a

$$\{y \in Y : \exists (\mu, \gamma) \in K, y \in Supp(\mu)\} \subset \pi^{-1}(\tilde{\pi}(p_1(K)))$$

où $\tilde{K} := \pi^{-1}(\tilde{\pi}(p_1(K)))$ est un sous espace compact de Y , car l'application $\pi : Y \rightarrow X$ est propre. De plus $p_2(K)$ est un sous espace compact de \mathcal{G} , donc d'après la remarque 3.27, l'espace $\tilde{K} *_{\pi, r} p_2(K)$ est un sous espace compact de $Y \rtimes \mathcal{G}$. Alors pour tout réel ε strictement positif, il existe i_ε dans I tel que pour tout $i \geq i_\varepsilon$ on a pour tout (y, γ) dans $\tilde{K} *_{\pi, r} p_2(K)$

$$|\phi_i(y, \gamma) - 1| < \varepsilon$$

ainsi pour tout (μ, γ) dans K et tout $i \geq i_\varepsilon$, on a

$$|\psi_i(\mu, \gamma) - 1| \leq \int_Y |\phi_i(y, \gamma) - 1| d\mu(y) < \varepsilon \int_Y d\mu(y) < \varepsilon$$

Donc $\lim_i \psi_i = 1$ uniformément sur tout compact K de $M \rtimes \mathcal{G}$.

Enfin pour tout $i \in I$, on note $\psi_i^{(0)}$ la restriction de ψ_i à $(M \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$. On a pour tout $x \in X$ et tout $\mu \in M_x$

$$\begin{aligned} |\psi_i^{(0)}| &= \left| \int_{Y_x} \phi_i(y, \varepsilon(x)) d\mu(y) \right| = \left| \int_{Y_x} \phi_i^{(0)}(y) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_{Y_x} |\phi_i^{(0)}(y)| d\mu(y) \leq \int_{Y_x} 1 d\mu(y) \leq 1 \end{aligned}$$

On a montré l'existence d'une suite $(\psi_i)_{i \in I}$ de fonctions continues, de type positif et à support compact dans $M \rtimes \mathcal{G}$ telle que

- pour tout $i \in I$, $\phi_i^{(0)} \leq 1$ où $\phi_i^{(0)}$ est la restriction de ϕ_i à $(M \rtimes \mathcal{G})^{(0)}$
- ϕ_i converge vers un sur tout sous espace compact de $M \rtimes \mathcal{G}$

ce qui prouve que le groupoïde $M \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable. □

Lemme 3.29. Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 des groupoïdes topologiques. Soient $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un homomorphisme de groupoïde continu et φ une fonction continue sur \mathcal{H}_2 et de type positif.

- la fonction $\varphi \circ f$ est continue sur \mathcal{H}_1 et de type positif
- si f est propre et φ à support compact dans \mathcal{H}_2 , alors $\varphi \circ f$ est à support compact dans \mathcal{H}_1

Démonstration. (a) Il est clair que la composition $\varphi \circ f$ est continue sur \mathcal{H}_1 . La fonction φ étant de type positif, on a pour tout entier n , x dans $\mathcal{H}_2^{(0)}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans \mathcal{H}_2^x et tout complexe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(\gamma_i^{-1} \gamma_j) \overline{\lambda_i} \lambda_j \geq 0$$

Ainsi on a pour tout n entier, x dans $\mathcal{H}_1^{(0)}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans \mathcal{H}_1^x et tout complexe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \varphi \circ f(\gamma_i^{-1} \gamma_j) \overline{\lambda_i} \lambda_j = \sum_{i,j=1}^n \varphi(f(\gamma_i)^{-1} f(\gamma_j)) \overline{\lambda_i} \lambda_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \varphi(\eta_i^{-1} \eta_j) \overline{\lambda_i} \lambda_j \geq 0 \end{aligned}$$

donc la fonction $\varphi \circ f$ est de type positif.

(b) On suppose que la fonction φ est à support compact et que f est propre. On note K_1 le support de la fonction $\varphi \circ f$, qui est fermé de \mathcal{H}_1 et K_2 le support de φ , qui est compact dans \mathcal{H}_2 . Soit γ dans \mathcal{H}_1 tel que $|\varphi(f(\gamma))| > 0$, alors $f(\gamma)$ est dans le support de φ et γ se trouve dans $f^{-1}(K_2)$. Comme f est propre, on a $f^{-1}(K_2)$ est compact et K_1 est un sous espace fermé de $f^{-1}(K_2)$, donc lui aussi compact. La fonction $\varphi \circ f$ est à support compact. □

Lemme 3.30. *Soit $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un homomorphisme entre groupoïdes topologiques continu et propre. Si \mathcal{H}_2 est moyennable, alors \mathcal{H}_1 est moyennable.*

Démonstration. Le groupoïde \mathcal{H}_2 étant moyennable il existe une suite $(\varphi_i)_{i \in I}$ de fonctions continues sur \mathcal{H}_2 , de type positif et à support compact telle que

- pour tout $i \in I$, $\varphi_i^{(0)} \leq 1$ où $\varphi_i^{(0)}$ est la restriction de φ_i à $\mathcal{H}_2^{(0)}$
- φ_i converge vers 1 uniformément sur tout sous espace compact de \mathcal{H}_2

Pour tout i dans I , on note $\psi_i = \varphi_i \circ f$ la fonction définie sur \mathcal{H}_1 . D'après le lemme 3.29, chaque fonction ψ_i est continue, de type positif et à support compact dans \mathcal{H}_1 . Pour tout i dans I et x dans $\mathcal{H}_1^{(0)}$, on a $\psi_i^{(0)}(x) = \varphi_i^{(0)}(f(x)) \leq 1$. Soit K un sous espace compact de \mathcal{H}_1 , par continuité de f , le sous espace $f(K)$ est compact dans \mathcal{H}_2 ; la suite $(\varphi_i)_{i \in I}$ convergeant uniformément vers 1 sur $f(K)$, pour tout réel ε strictement positif, il existe i' dans I tel que pour tout $i \geq i'$ et tout k' dans $f(K)$, on a $|\varphi_i(k') - 1| < \varepsilon$. Ainsi on a pour tout $i \geq i'$ et tout k dans K

$$|\psi_i(k) - 1| = |\varphi_i(f(k)) - 1| < \varepsilon$$

Le groupoïde \mathcal{H}_1 est moyennable. □

On en arrive à la démonstration du théorème 3.1

Démonstration du Théorème 3.1. On suppose qu'il existe un \mathcal{G} -espace localement compact Y pour lequel l'application $\pi : Y \rightarrow X$ est continue, propre, surjective et ouverte

et le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable. On considère M le sous espace de l'espace des mesures de Radon $R(Y)$ de Y défini par

$$M = \{\mu \in R(Y) : \exists x \in X, \text{Supp}(\mu) \subset Y_x \text{ et } \mu(Y) = 1\}$$

Suivant la proposition 3.21, l'espace M est localement compact et muni d'une action continue du groupoïde \mathcal{G} . On note $\tilde{\pi} : M \rightarrow X$ l'application canonique et d'après la proposition 3.20, l'application $\tilde{\pi}$ est continue, surjective, propre et ouverte. Le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ étant moyennable, la proposition 3.28 implique que le groupoïde $M \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable. D'après la proposition 3.26, il existe une application $\tilde{\theta} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow M$ continue, propre et \mathcal{G} -équivariante.

On note $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}} : \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \rightarrow M \rtimes \mathcal{G}$ l'application définie, pour tout (z, γ) dans $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$, par

$$\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma) = (\tilde{\theta}(z), \gamma)$$

L'application $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}$ est un homomorphisme de groupoïdes : en effet pour tout z dans $\beta_X \mathcal{G}$ et (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$ avec $r(\gamma) = \tilde{s}(z)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma) \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z\gamma, \eta) &= (\tilde{\theta}(z), \gamma) \cdot (\tilde{\theta}(z\gamma), \eta) \\ &= (\tilde{\theta}(z), \gamma) \cdot (\tilde{\theta}(z)\gamma, \eta) \\ &= (\tilde{\theta}(z), \gamma\eta) \\ &= \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}(z, \gamma\eta) \\ &= \tilde{\theta}_{\mathcal{G}}((z, \gamma) \cdot (z\gamma, \eta)) \end{aligned}$$

L'homomorphisme de groupoïde $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}}$ est clairement continu et propre, par composition d'applications continues et propres. D'après le lemme 3.30, puisque le groupoïde $M \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable et l'homomorphisme $\tilde{\theta}_{\mathcal{G}} : \beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G} \rightarrow M \rtimes \mathcal{G}$ continu et propre, alors le groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable. □

3.7. Groupoïde étale exact. On dit qu'un groupoïde \mathcal{G} est exact si pour toute suite exacte \mathcal{G} -équivariante,

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

de \mathcal{G} -algèbres, la suite

$$0 \longrightarrow I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte.

On rappelle qu'un groupoïde étale localement compact $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ (X est l'espace des unités du groupoïde \mathcal{G}) est moyennable à l'infini s'il existe un \mathcal{G} -espace localement compact Y , pour lequel l'application $\pi : Y \rightarrow X$ est continue, surjective, ouverte et propre, et tel que le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable.

Théorème 3.31. *Soit \mathcal{G} un groupoïde étale d'espace des unités X . On considère les assertions suivantes :*

- (1) *le groupoïde \mathcal{G} est moyennable à l'infini*
- (2) *le groupoïde \mathcal{G} agit moyennablement sur l'espace $\beta_X \mathcal{G}$*

(3) le groupoïde \mathcal{G} est exact

(4) la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ est exacte

Alors on a $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$

Démonstration. On démontre successivement chacune des implications dans l'ordre de l'énoncé :

(1) \Rightarrow (2) : il s'agit de la démonstration 3.6 du théorème 3.1.

(2) \Rightarrow (3) : on considère une suite exacte $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ de \mathcal{G} -algèbres. La suite

$$0 \longrightarrow \pi^* I \longrightarrow \pi^* A \longrightarrow \pi^* A/I \longrightarrow 0$$

est alors une suite exacte de $C_0(Y)$ -algèbres munies d'une action du groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$. Le groupoïde $Y \rtimes \mathcal{G}$ étant moyennable, le foncteur $B \rightarrow B \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ est exacte dans la catégorie des $Y \rtimes \mathcal{G}$ -algèbres. On a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

L'application $\pi : Y \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ étant continue, surjective et propre, il existe un homomorphisme injectif de C^* -algèbres $\phi_I : I \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$. On définit de même des homomorphismes injectifs $\phi_A : A \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ et $\phi_{A/I} : A/I \rtimes_r \mathcal{G} \hookrightarrow \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I \rtimes_r \mathcal{G} & \xrightarrow{i_r} & A \rtimes_r \mathcal{G} & \xrightarrow{q_r} & A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_I & & \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_{A/I} \\ 0 & \longrightarrow & \pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) & \longrightarrow & \pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) & \longrightarrow & \pi^* A/I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pour montrer que la première ligne est exacte, on considère a dans $A \rtimes_r \mathcal{G}$ tel que $q_r(a) = 0$ et $\phi_A(a)$ est dans $\pi^* A \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une approximation de l'unité dans l'idéal I , alors $(\phi_I(u_i))_{i \in I}$ est une approximation de l'unité dans l'algèbre des multiplicateurs de $\pi^* I \rtimes_r (Y \rtimes \mathcal{G})$ et on a

$$\phi_A(a) = \lim_i \phi_I(u_i) \phi_A(a) = \lim_i \phi_A(u_i \cdot a) \in \phi_I(I \rtimes_r \mathcal{G})$$

Comme ϕ_A est injective, l'élément a est dans $I \rtimes_r \mathcal{G}$ et la suite

$$0 \longrightarrow I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte et le foncteur $B \rightarrow B \rtimes_r \mathcal{G}$ est exact sur la catégorie des \mathcal{G} -algèbres.

(3) \Rightarrow (4) : on considère la suite exacte de C^* -algèbres suivantes

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

La C^* -algèbre $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ étant nucléaire, on a alors

$$0 \longrightarrow I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow A \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow A/I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow 0$$

est une suite de $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ -algèbres telle que la collection d'applications

$$id_\gamma : C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(s(\gamma)) \rightarrow C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(r(\gamma))$$

qui à tout i dans $C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(s(\gamma)) = I$ associe $id_\gamma(i) = i$ dans $I = C_0(\mathcal{G}^{(0)}, I)(s(\gamma))$ définit une action continue de \mathcal{G} sur $I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)})$. On obtient une suite exacte de \mathcal{G} -algèbres et le foncteur $\rtimes_r \mathcal{G}$ étant exact, par hypothèse, on a

$$0 \longrightarrow I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow A/I \otimes C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

correspondant à la suite

$$0 \longrightarrow I \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow A \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow A/I \otimes C_r^*(\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

est exacte.

□

4. C^* -ALGÈBRE $C_r^*(\mathcal{G})$ ET APPROXIMATION DE LA REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE

Il est légitime de se demander si l'exactitude de C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$ implique à son tour la moyennabilité à l'infini du groupoïde \mathcal{G} ou encore la moyennabilité du groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$.

Dans [KW99], Kirchberg et Wassermann donne l'équivalence entre l'exactitude d'un groupe discret et l'exactitude de sa C^* -algèbre réduite de ce groupe. Dans [Oza00], Ozawa prouve l'équivalence entre l'exactitude de la C^* -algèbre réduite et la moyennabilité de l'action par translation à gauche du groupe sur son compactifié de Stone-Cech.

Anantharaman-Delaroche donne une réponse affirmative à cette question dans [AD02] dans le cadre plus large des groupes localement compacts et séparés en utilisant une condition suffisante sur le groupe localement compact et séparé qu'elle appelle *propriété (W)* et qui est une condition plus faible que la moyennabilité intérieure :

Définition 4.1. *On dit qu'un groupe localement compact et séparé possède la propriété (W) si pour tout compact K de G et tout réel ε strictement positif, il existe une fonction f continue, bornée, de type positif et à support proprement supporté sur $G \times G$ telle que $|f(g, g) - 1| \leq \varepsilon$ pour tout élément g dans K .*

et obtient le résultat suivant

Théorème 4.2 ([AD02], Théorème 7.3). *Soit G un groupe localement compact et séparé. Si le groupe G possède la propriété (W) et si la C^* -algèbre $C_r^*(G)$ est exacte, alors le groupe G est moyennable à l'infini.*

Il est facile de prouver que les groupes discrets possèdent la *propriété (W)* en considérant la fonction caractéristique sur la diagonale Δ_G de l'espace $G \times G$ ce qui permet de retrouver le résultat de Ozawa [Oza00] :

$$C_r^*(G) \text{ exact} \iff G \text{ moyennable à l'infini} \iff \beta G \rtimes G \text{ moyennable}$$

Dans cette section, on considère un groupoïde étale localement compact et σ -compact séparé $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ tel que la C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$ est exacte et on note ν le système de Haar pour \mathcal{G} constitué des mesures de comptage des s -fibres de \mathcal{G} et $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ la $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs $C_0(X)$ -linéaires qui admettent un adjoint, sur le $C_0(X)$ -module de Hilbert $L^2(\mathcal{G}, \nu)$. L'idée est de travailler sur des $C_0(X)$ -algèbres continues et exactes afin d'utiliser un résultat de [Bla97] de plongement $C_0(X)$ -linéaire de telles $C_0(X)$ -algèbres

dans la $C_0(X)$ -algèbre nucléaire $C_0(X) \otimes \mathcal{O}_2$, où \mathcal{O}_2 est l'algèbre de Cuntz. Comme la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ n'est pas munie d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre, on construit une $C_0(X)$ -algèbre, notée \mathcal{A} , qui est la plus petite sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ contenant l'image de $C_r^*(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ par la représentation régulière λ et l'image de $C_0(X)$ par la structure de $C_0(X)$ -algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$. On montre alors que l'exactitude de la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ implique l'exactitude de la $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} . Afin d'utiliser le théorème de [Bla97], on suppose que la $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} est continue et on se restreint au cas où l'espace des unités X du groupoïde est compact. On travaille donc sur une classe plus faible de groupoïdes étales localement compacts et σ -compacts qui satisfont ces deux conditions. Dès lors que l'on a utilisé le théorème de plongement $C(X)$ -linéaire des $C(X)$ -algèbres continues et exactes dans la $C(X)$ -algèbre nucléaire $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$, on va pouvoir utiliser les propriétés de $C(X)$ -nucléarité pour obtenir une approximation par des factorisations à travers les $C(X)$ -algèbres $C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$ de l'application identité sur \mathcal{A} et donc de la représentation régulière de $C_r^*(\mathcal{G})$. C'est par le biais de cette approximation par des factorisations de la représentation régulière de la C^* -algèbre exacte $C_r^*(\mathcal{G})$ que nous pouvons montrer la moyennabilité de l'action de \mathcal{G} sur $\beta_X \mathcal{G}$. On obtient alors l'implication (4) \Rightarrow (2) du théorème 3.31 pour la classe des groupoïdes étales localement compacts et σ -compacts ayant la propriété (W), dont l'espace des unités est compact et tels que la $C(X)$ -algèbre induite \mathcal{A} est continue.

4.1. Approximation de l'unité et opérateurs de rangs finis. Dans cette partie, on utilise les résultats de l'article d'Arveson [Arv77] sur les C^* -algèbres que l'on adapte au cas des $C_0(X)$ -algèbres, dont les éléments sont considérés comme des opérateurs sur un $C_0(X)$ -module de Hilbert.

Pour H un espace de Hilbert séparable, on rappelle qu'un opérateur quasidiagonal T est un opérateur borné sur l'espace de Hilbert séparable H pour lequel il existe une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projections de rang fini, qui converge fortement vers l'identité et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n T - T F_n\| = 0$$

Cette définition équivaut à l'existence d'une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projections de rang fini deux à deux orthogonales telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n = 1$ et T est une perturbation compacte de l'opérateur $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n T E_n$.

Dans l'article [Arv77], l'auteur construit, dans le cadre plus général des opérateurs bornés $T : H \rightarrow H$ (non nécessairement quasidiagonaux), une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs de rang fini, qui converge fortement vers l'opérateur identité et vérifiant la relation, pour tout T dans $L(H)$,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \|F_n T - T F_n\| = 0$$

Comme dans le cas des opérateurs quasidiagonaux, l'existence d'une telle suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de construire une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs de rang fini dans $L(H)$ tel que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2 = 1$ et pour laquelle, tout opérateur T est une perturbation compacte de $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n T E_n$.

Le principal objectif de cette partie consiste à montrer que pour toute $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} , considérée comme sous $C_0(X)$ -algèbre de la $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs d'un $C_0(X)$ -module de Hilbert \mathcal{H} , et tout idéal \mathcal{K} de \mathcal{A} d'espace nul trivial, il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments positifs dans $\overline{\mathcal{K}}$ vérifiant

- (a) $E_n \in \overline{\mathcal{K}}$ et $\sum_n E_n^2 = Id_{\mathcal{H}}$
- (b) $A - \sum_n E_n A E_n$ est dans \mathcal{K} , pour tout A dans \mathcal{A}

On montre aussi que pour toute partie finie \mathcal{F} de \mathcal{A} , il est possible de choisir les éléments E_n de sorte que, pour tout élément A de \mathcal{F} , la norme $\|A - \sum_n E_n A E_n\|$ soit aussi petite qu'on le souhaite.

On considère \mathcal{A} une $C_0(X)$ -algèbre et \mathcal{K} un idéal bilatère, non nécessairement fermé, dans \mathcal{A} .

Définition 4.3. Une approximation de l'unité pour \mathcal{K} est une suite croissante $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments positifs de la boule unité de l'idéal \mathcal{K} tels que $\lim_\lambda \|e_\lambda k - k\| = 0$ pour tout k dans \mathcal{K} . De plus, si $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ satisfait la relation $\lim_\lambda \|e_\lambda a - a e_\lambda\| = 0$, pour tout a dans \mathcal{A} , alors la suite est quasimentrale.

Dans le cadre des $C_0(X)$ -algèbres, on obtient un théorème sur l'existence d'approximation de l'unité quasimentrale, analogue au cas des C^* -algèbres.

Théorème 4.4. Tout idéal \mathcal{K} dans une $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} possède une approximation de l'unité quasimentrale. Si de plus \mathcal{A} est séparable, cette unité approchée quasimentrale peut être indexée sur \mathbb{N} et on a $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout n dans \mathbb{N} .

Démonstration. L'idéal \mathcal{K} de la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} est aussi un idéal pour la structure de C^* -algèbre sous jacente de \mathcal{A} ; on applique alors la démonstration de [Arv77]. \square

Remarque 4.5. La preuve montre que l'on peut construire, à partir d'une unité approchée $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ quelconque pour \mathcal{K} , une approximation de l'unité quasimentrale, dont les éléments sont des combinaisons linéaires convexes des éléments de $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Soit B une C^* -algèbre et \mathcal{H} un module hilbertien sur B .

Définition 4.6. Soit \mathcal{H} un B -module hilbertien séparable et T un opérateur B -linéaire et possédant un adjoint sur \mathcal{H} ; on dit que T est un opérateur positif si pour tout élément ξ dans \mathcal{H} on a $\langle T\xi, \xi \rangle$ est positif dans B .

Notation 4.7. On adoptera les notations suivantes en ce qui concerne les opérateurs de rang fini :

- On appelle opérateur de rang 1, tout endomorphisme sur le B -module hilbertien \mathcal{H} qui s'écrit sous la forme $\theta_{x,y}$, avec x et y dans \mathcal{H} , où pour tout ξ dans \mathcal{H} , on a $\theta_{x,y}(\xi) = x\langle y, \xi \rangle$.
- On appelle opérateur de rang fini sur le B -module hilbertien \mathcal{H} est un endomorphisme de B -module $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, qui est une combinaison linéaire d'opérateurs de rang un.
- L'ensemble des opérateurs de rang fini sur un B -module hilbertien \mathcal{H} est un idéal dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, noté \mathcal{K}_0 , dont la fermeture, notée \mathcal{K} , est l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

En utilisant le théorème 4.4 , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.8. *Soit \mathcal{H} un $C(X)$ -module de Hilbert séparable.*

- (i) *Il existe une suite croissante $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'opérateurs positifs de rang fini qui converge fortement vers l'opérateur identité de \mathcal{H} et vérifiant la relation $\lim_\lambda \|F_\lambda T - T F_\lambda\| = 0$, pour tout opérateur $C(X)$ -linéaire T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
- (ii) *Pour \mathcal{A} une $C(X)$ -algèbre séparable d'opérateurs sur un champ continu d'espaces de Hilbert séparables \mathcal{H} , il existe une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante d'opérateurs positifs et de rang fini qui converge fortement vers l'identité et vérifiant la relation $\lim_n \|F_n A - A F_n\| = 0$, pour tout A dans \mathcal{A} .*

Démonstration. Quitte à remplacer \mathcal{A} par la $C(X)$ -algèbre des perturbations compactes d'opérateurs de \mathcal{A} , on considère l'idéal \mathcal{K} des opérateurs de rang fini dans la $C(X)$ -algèbre séparable \mathcal{A} et on applique le théorème 4.4 pour obtenir la suite voulue. \square

Dans le théorème qui suit, on considère la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} comme une sous $C(X)$ -algèbre d'opérateurs de l'ensemble des opérateurs bornés, $C(X)$ -linéaires et possédant un adjoint sur un $C(X)$ -module hilbertien $\mathcal{H}_{C(X)}$. Soit \mathcal{I} un idéal de \mathcal{A} , on appelle espace nul de \mathcal{I} , l'espace défini par $\{\xi \in \mathcal{H}_{C(X)} : T(\xi) = 0, \forall T \in \mathcal{I}\}$; on dira que l'espace nul de l'idéal \mathcal{I} est trivial, s'il est réduit au vecteur nul.

Théorème 4.9. *Soit \mathcal{K} un idéal dans \mathcal{A} dont l'espace nul est trivial. Il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs dans la fermeture $\overline{\mathcal{K}}$ (pour la topologie de la norme de \mathcal{K}) telle que pour tout n dans \mathbb{N} , on a E_n^2 est dans l'idéal \mathcal{K} , $\sum_{n \geq 1} E_n^2 = 1$ et $A - \sum E_n A E_n$ est dans l'idéal \mathcal{K} , pour tout A dans \mathcal{A} .*

De plus, en fixant $\varepsilon \geq 0$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ un sous ensemble fini, on peut choisir la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que $\|A - \sum E_n A E_n\| < \varepsilon$, pour tout A dans \mathcal{F}

Remarque 4.10. Avant de s'attaquer à la démonstration du théorème, on peut faire les remarques suivantes :

a) Si une telle suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, alors $\sum E_n A E_n$ est bien définie par l'hypothèse $\sum E_n^2 = 1$ qui implique la convergence forte de la somme. En effet, on considère le $C(X)$ -module hilbertien $\mathcal{H}' := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)}$ et on note i' la représentation de \mathcal{A} dans l'ensemble des opérateurs $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ définie par $i'(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A$. On peut alors définir une isométrie, en posant

$$\begin{aligned} V : \mathcal{H}_{C(X)} &\longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)} = \mathcal{H}' \\ \xi &\longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi) \end{aligned}$$

On note $P_n : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ la projection sur les n premières composantes de $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{C(X)}$ et $V_n := P_n V$; alors pour tout A dans \mathcal{A} , on a la convergence dans la topologie forte

$$\sum_{k=1}^n E_k A E_k = V^* P_n i'(A) P_n V \longrightarrow V^* i'(A) V = \sum_{k=1}^{+\infty} E_k A E_k$$

b) L'application $l(A) = \sum E_n A E_n$ pouvant s'écrire sous la forme $l(A) = V^* i'(A) V$, elle est complètement positive et son image est dans la fermeture forte $\overline{\mathcal{A}}^{forte}$ de \mathcal{A} .

Puisque l'élément $A - l(A)$ est dans \mathcal{K} qui est un idéal de \mathcal{A} , alors l'application l est à image dans \mathcal{A} .

Pour démontrer le théorème 4.9, on utilise le lemme suivant démontré dans [Arv77] :

Lemme 4.11. *Soit ε un réel strictement positif et f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs complexes et qui soit nulle en 0. Alors il existe un réel δ strictement positif tel que pour tout élément a et tout élément positif e dans la boule unité de \mathcal{A} , on a $\|ae - ea\| \leq \delta$ implique $\|af(e) - f(e)a\| \leq \varepsilon$.*

Démonstration du Théorème 4.9. On va utiliser l'existence de l'approximation de l'unité dans \mathcal{K} pour construire la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Soit ε strictement positif, alors, d'après le lemme 4.11, il existe $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 telle que pour tout a et E dans la boule unité de \mathcal{A} , avec E positif, on a

$$\|Ea - aE\| \leq \delta_n \Rightarrow \|E^{1/2}a - aE^{1/2}\| \leq \varepsilon/2^{n+1}$$

On considère une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous ensembles finis de \mathcal{A} telle que la réunion $\bigcup \mathcal{F}_n$ est dense dans la boule unité de \mathcal{A} . (On supposera de plus que \mathcal{F}_1 contient un nombre fini d'éléments de norme 1)

On a vu qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité quasicentrale dans \mathcal{K} et (quitte à considérer une sous suite), on peut supposer que pour tout A dans \mathcal{F}_{n+1} ,

$$\|u_n A - A u_n\| \leq \delta_n/2$$

On a, en posant $u_0 = 0$

$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{F}_1, & \|u_1 A - A u_1\| < \delta_1 \\ \forall A \in \mathcal{F}_n, & \|(u_n - u_{n-1})A - A(u_n - u_{n-1})\| < \delta_{n-1} \end{cases}$$

b/ Par calcul fonctionnel continu pour la fonction $f(x) = x^{1/2}$, on pose, pour tout n dans \mathbb{N} , $E_n = (u_n - u_{n-1})^{1/2}$. Alors pour $\varepsilon \geq 0$ et une suite décroissante de réels positifs tendant vers zéro $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appropriée, on a pour tout A dans \mathcal{F}_n

$$\|E_n A - A E_n\| \leq \varepsilon/2^n$$

L'élément $E_n^2 = u_n - u_{n-1}$ est dans \mathcal{K} ; comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une unité approchée pour \mathcal{K} (dont l'espace nul est trivial), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 1, ce qui implique l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E_n^2 = 1$$

c/ Il reste à montrer que pour tout élément A dans \mathcal{A} , l'image $l(A)$ est une perturbation compacte de l'opérateur A . Or pour tout A dans $\bigcup \mathcal{F}_n$, on a par construction $\sum \|E_n A - A E_n\| < +\infty$. D'après la remarque 4.10, combinée avec l'égalité suivante

$$A - l(A) = A - \sum_{n \geq 1} E_n A E_n = \sum_{n \geq 1} (A E_n^2 - E_n A E_n) = \sum_{n \geq 1} (A E_n - E_n A) E_n$$

on a alors $A - l(A) \in \mathcal{K}$, pour tout A dans $\bigcup \mathcal{F}_n$.

Or pour tout A dans \mathcal{A} , il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\bigcup \mathcal{F}_n$, qui converge en norme vers A . D'après la remarque 4.10, $A - l(A)$ est bien définie et la suite $(A_k - l(A_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge en norme vers $A - l(A)$. Comme $A_k - l(A_k)$ est compact pour tout k entier, on en déduit que pour tout A dans \mathcal{A} , l'élément $A - l(A)$ est dans \mathcal{K} . \square

Définition 4.12. Soit \mathcal{A} une $C(X)$ -algèbre, considérée comme sous- $C(X)$ -algèbre de la $C(X)$ -algèbre des opérateurs bornés, $C(X)$ -linéaires admettant un adjoint sur un $C(X)$ -module de Hilbert séparable. On suppose l'existence d'une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs, de rang fini satisfaisant $\sum_n E_n^2 = 1$. On pose $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ l'application $C(X)$ -linéaire positive qui, à tout a de \mathcal{A} , associe l'opérateur $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a E_n$. L'application $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est dite application localisante pour \mathcal{A} si pour tout a dans \mathcal{A} , l'opérateur $a - \omega(a)$ est compact.

4.2. Représentation régulière et opérateurs de rang fini. On a vu dans la section 2.2.2, la construction de C^* -algèbres associées à un groupoïde localement compact et séparé muni d'un système de Haar. Pour simplifier les notations, on note dans la suite $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ pour la $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs $\mathcal{L}_{C_0(X)}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$.

La représentation régulière est le $*$ -homomorphisme injectif de C^* -algèbres $\lambda : C_r^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ et, d'après la proposition 2.24, la C^* -algèbre $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$ est munie d'une structure de $C_0(X)$ -algèbre. L'image par la représentation λ de $C_r^*(\mathcal{G})$ est une sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, qui n'est pas nécessairement stable par la structure de $C_0(X)$ -module de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$.

Dans cette partie on définit une sous- $C_0(X)$ -algèbre de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$, que l'on note \mathcal{A} , à partir de la C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$. On montre, via la proposition 4.18, que cette construction conserve la propriété d'exactitude. L'idée est de remplacer la sous- C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ exacte par la sous- $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} de manière à pouvoir utiliser un théorème de [Bla97] qui donne l'existence d'un plongement $C_0(X)$ -linéaire de toute $C_0(X)$ -algèbre continue et exacte dans la $C_0(X)$ -algèbre $C_0(X) \otimes \mathcal{O}_2$. On termine cette partie en appliquant le théorème 4.9 à la $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} et l'idéal des opérateurs compacts : la suite d'opérateurs positifs compacts que l'on obtient, joue un rôle central dans l'approximation par factorisation de l'application identité de \mathcal{A} .

Définition 4.13. On note $\mathcal{A} = C^*(\lambda(C_r^*(\mathcal{G})), \phi(C_0(X)))$, la plus petite sous C^* -algèbre d'opérateurs de $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ contenant $\phi(C_0(X))$ et $\lambda(C_r^*(\mathcal{G}))$.

Pour tout a dans $C_r^*(\mathcal{G})$, l'opérateur $\lambda(a)$ sur $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ est $C(X)$ -linéaire. La C^* -algèbre \mathcal{A} est engendrée par les éléments $\sum_{i \in I} \phi(f_i) \cdot \lambda(a_i)$ où la somme est finie et a_i est un élément de $C_r^*(\mathcal{G})$ et la fonction f_i est dans $C(X)$.

Proposition 4.14. La C^* -algèbre \mathcal{A} est une sous- $C_0(X)$ -algèbre de la $C_0(X)$ -algèbre $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$.

Remarque 4.15. Nous considérons à partir de maintenant la $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} comme une sous- $C_0(X)$ -algèbre de la $C_0(X)$ -algèbre des opérateurs $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu))$.

Définition 4.16. Soit \mathcal{B} une $C_0(X)$ -algèbre. On dit que \mathcal{B} est une $C_0(X)$ -algèbre continue si le champ semi-continu supérieurement de C^* -algèbres sur X est continu, c'est-à-dire si pour tout b dans \mathcal{B} , la fonction $x \rightarrow \|b_x\|$ est continue.

Notation 4.17. On dit que le groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ vérifie la condition **(Cont)** si la $C_0(X)$ -algèbre associée \mathcal{A} introduite dans la définition 4.13 est continue. On suppose à partir de maintenant que le groupoïde étale $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ vérifie la condition **(Cont)** c'est-à-dire que la $C_0(X)$ -algèbre \mathcal{A} est continue.

La proposition qui suit permet de voir que la propriété d'exactitude de la C^* -algèbre réduite $C_r^*(\mathcal{G})$ est transférée à la C^* -algèbre \mathcal{A} :

Proposition 4.18. Si la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ est exacte, alors la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} est exacte.

Démonstration. On note A la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ et on suppose que A est exacte ; la C^* -algèbre $C(X)$ étant nucléaire, $A \otimes C(X)$ est exacte. On définit un homomorphisme $\pi : A \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{A}$ défini pour les éléments de la forme $\sum_i a_i \otimes f_i$ par

$$\pi\left(\sum_i a_i \otimes f_i\right) = \sum_i \phi(f_i) \cdot \lambda(a_i)$$

Cet homomorphisme est surjectif et on a un isomorphisme de C^* -algèbres de $A \otimes C(X)/I$ dans \mathcal{A} , où $I := \ker(\pi)$. D'après un résultat de Kirchberg (voir une version (IV.3.4.19) de [Blac]) affirmant que tout quotient de C^* -algèbre séparable exacte est exact, la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} est exacte. □

On rappelle ci-dessous le théorème de stabilisation de Kasparov pour les modules de Hilbert :

Définition 4.19. A toute C^* -algèbre B , on associe le module de Hilbert standard sur B , que l'on note \mathcal{H}_B défini par

$$\mathcal{H}_B = \left\{ (b_k) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} B : \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^* b_k \text{ converge dans } B \right\}$$

Théorème 4.20 (Stabilisation de Kasparov). Pour tout B -module de Hilbert \mathcal{F} , dénombrablement engendré, il existe un isomorphisme de B -module de Hilbert entre $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}_B$ et \mathcal{H}_B .

On trouve une démonstration du théorème 4.20 dans [Kas80] ou encore dans [Lan95] : il s'agit d'une variante de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. A l'aide du théorème de stabilisation de Kasparov 4.20, on prouve la proposition suivante

Proposition 4.21. Il existe un homomorphisme de $C(X)$ -algèbres injectif de la $C(X)$ -algèbre $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$

Démonstration. Comme $l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert séparable donc dénombrablement engendré $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ est un $C(X)$ -module de Hilbert dénombrablement engendré, alors le $C(X)$ -module de Hilbert $L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})$ est dénombrablement engendré. En appliquant le théorème 4.20 de stabilisation de Kasparov au $C(X)$ -module de Hilbert

$L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})$ dénombrablement engendré, il existe un isomorphisme de $C(X)$ -module hilbertien entre $L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{H}_{C(X)}$ et $\mathcal{H}_{C(X)}$. L'homomorphisme de $C(X)$ -module de Hilbert

$$i : L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{H}_{C(X)}$$

étant injectif, il existe un plongement $C(X)$ -linéaire $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$. \square

On termine cette partie en appliquant le théorème 4.9 à la $C(X)$ -algèbre d'opérateurs \mathcal{A} . On note \mathcal{K}_0 l'idéal des opérateurs de rang fini sur le $C(X)$ -module de Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$, décrit auparavant. On suppose, quitte à remplacer \mathcal{A} par la $C(X)$ -algèbre des perturbations compactes des éléments de \mathcal{A} , que l'ensemble des opérateurs compacts \mathcal{K} est dans \mathcal{A} .

On considère $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite dans $\mathcal{L}(C(X) \otimes l^2(\mathbb{N}))$, telle que pour tout entier n , on a $e_n = 1 \otimes p_n$, avec p_n la projection sur les n premières composantes de $l^2(\mathbb{N})$. On obtient une approximation de l'unité dans l'idéal \mathcal{K}_0 , constituée de projections. On va ainsi pouvoir construire une approximation de l'unité quasicontrainte (u_n) dans l'idéal \mathcal{K}_0 de \mathcal{A} c'est-à-dire une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments positifs de la boule unité de \mathcal{K} , telle que pour tout a dans \mathcal{A} , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|au_n - u_na\| = 0$ c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|a(x)u_n(x) - u_n(x)a(x)\| = 0$$

Lemme 4.22. *L'idéal \mathcal{K}_0 des opérateurs de rang fini dans la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} possède une approximation de l'unité quasicontrainte $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenue à partir de combinaisons linéaires convexes d'éléments de l'approximation de l'unité $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{K}_0 .*

Démonstration. La preuve est directe en utilisant le théorème 4.4. \square

Lemme 4.23. *L'espace nul de l'idéal \mathcal{K}_0 est trivial.*

Proposition 4.24. *Il existe une suite d'opérateurs $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positifs dans l'ensemble des opérateurs de rang fini \mathcal{K}_0 , telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2 = 1$ et pour tout A dans \mathcal{A} , on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n$ est une perturbation compacte de A . De plus, pour tout réel strictement positif ε et toute partie finie (ou même compacte) \mathcal{F} dans \mathcal{A} , on peut choisir $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sorte que $\|A - \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n\| < \varepsilon$, pour tout A dans \mathcal{F} .*

Démonstration. L'ensemble \mathcal{K}_0 des opérateurs de rang fini sur le $C(X)$ -module de Hilbert $\mathcal{H}_{C(X)}$ est un idéal bilatère dans la $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} , dont l'espace nul est réduit au vecteur nul de $\mathcal{H}_{C(X)}$, et on a construit une unité approchée dans \mathcal{K}_0 quasicontrainte pour \mathcal{A} . D'après le théorème 4.9 il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs dans l'ensemble des opérateurs compacts \mathcal{K} , (qui est la fermeture pour la norme de l'idéal \mathcal{K}_0) vérifiant pour tout entier n , E_n^2 est un opérateur de rang fini, $\sum_n E_n^2 = 1$ et pour tout opérateur A de \mathcal{A} , l'opérateur $A - \sum_n E_n A E_n$ est compact. De plus, pour tout entier n , l'opérateur E_n est de rang fini car E_n^2 l'est. \square

La suite d'opérateurs positifs compacts $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par la proposition 4.24 nous permet de construire dans les prochaines étapes une application localisante dans \mathcal{A} et des projections dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$.

4.3. $C(X)$ -nucléarité et exactitude. On considère à partir de maintenant et ceci jusqu'à la fin de cette section que l'espace des unités X du groupoïde étudié est compact. Dans cette partie, on s'intéresse aux relations entre l'exactitude et la nucléarité dans la catégorie des $C(X)$ -algèbres continues.

On rappelle tout d'abord les notions de nucléarité pour les $C(X)$ -algèbres. On définit l'algèbre de Cuntz \mathcal{O}_2 puis on montre que la $C(X)$ -algèbre continue $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ est $C(X)$ -nucléaire. On utilise alors un résultat de Kirchberg qui apparait dans l'appendice de [Bla97] pour définir un homomorphisme injectif de $C(X)$ -algèbres $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$. On se sert alors de la $C(X)$ -nucléarité de $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ pour obtenir les premières approximations par factorisations de l'homomorphisme identité $id_{\mathcal{A}}$.

Dans la théorie des C^* -algèbres, la nucléarité d'une C^* -algèbre B peut être caractérisée par l'existence d'approximations par les applications complètement positives de rang fini de l'homomorphisme identité de B . On dit que l'homomorphisme identité est nucléaire. Cette définition s'étend aux applications linéaires complètement positives.

On définit une notion analogue de $C(X)$ -nucléarité pour les applications $C(X)$ -linéaires complètement positives entre $C(X)$ -algèbres.

Définition 4.25. *a) Soient A_1 et A_2 deux $C(X)$ -algèbres. Une application $C(X)$ -linéaire complètement positive $\theta : A_1 \rightarrow A_2$ est dite $C(X)$ -nucléaire si et seulement si pour tout sous ensemble compact K dans A_1 et tout réel strictement positif ε , il existe un entier n et des applications $C(X)$ -linéaires, complètement positives et contractantes $\phi_n : A_1 \rightarrow C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$ et $\psi_n : C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow A_2$ telles que pour tout a dans K , on ait*

$$\|\theta(a) - \psi_n \circ \phi_n(a)\| < \varepsilon$$

b) Une $C(X)$ -algèbre A est dite $C(X)$ -nucléaire si l'homomorphisme identité est $C(X)$ -nucléaire.

Définition 4.26. *On appelle C^* -algèbre de Cuntz unifère la C^* -algèbre engendrée par deux isométries s_1, s_2 satisfaisant la relation $1 = s_1 s_1^* + s_2 s_2^*$. On note \mathcal{O}_2 cette C^* -algèbre.*

Proposition 4.27. *La $C(X)$ -algèbre $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ est $C(X)$ -nucléaire.*

Démonstration. La C^* -algèbre \mathcal{O}_2 étant nucléaire, pour tout sous espace compact K de \mathcal{O}_2 et tout réel strictement positif ε , il existe un entier n et des applications linéaires continues, complètement positives et contractantes, notées $\varphi : \mathcal{O}_2 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ et $\psi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_2$ vérifiant pour tout o dans K ,

$$\|o - \psi \circ \varphi(o)\| < \varepsilon$$

L'algèbre $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ est une $C(X)$ -algèbre continue (c'est un champ continu trivial de C^* -algèbres sur X de fibre constante \mathcal{O}_2). On considère \mathcal{K} un sous espace compact de $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ et ε un réel strictement positif. Pour tout f dans \mathcal{K} , on pose U_f le voisinage ouvert défini par $U_f = \{g \in \mathcal{O}_2 \otimes C(X) : \|f - g\| < \varepsilon/3\}$. On obtient alors un recouvrement ouvert de \mathcal{K} . Par compacité, il existe une famille finie $\{f_1, \dots, f_p\}$ d'éléments de \mathcal{K} , tels

que $\mathcal{K} \subset \cup_{j=1}^p U_{f_j}$. Pour tout f dans \mathcal{K} , il existe j dans $\{1, \dots, p\}$ tel que pour tout x dans X , on a

$$\|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/3$$

On peut identifier la $C(X)$ -algèbre $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ avec la $C(X)$ -algèbre $C(X, \mathcal{O}_2)$ et pour tout j dans $\{1, \dots, p\}$, on a $\overline{f_j(K)}$ est un sous espace compact de \mathcal{O}_2 . La réunion finie $K = \cup_{j=1}^p \overline{f_j(K)}$ est un sous espace compact de \mathcal{O}_2 , et il existe donc n un entier et des contractions linéaires continues et complètement positives, notées $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_2 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ et $\tilde{\psi} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_2$, vérifiant $\|f_j(x) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(f_j(x))\| < \varepsilon/3$, pour tout x dans X et tout j dans $\{1, \dots, p\}$. On pose $\varphi : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \rightarrow M_n \otimes C(X)$ application $C(X)$ -linéaire complètement positive et contractante définie par $\varphi := \tilde{\varphi} \otimes id_{C(X)}$ et $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ application $C(X)$ -linéaire complètement positive et contractante définie par $\psi := \tilde{\psi} \otimes id_{C(X)}$ et on a pour tout j dans $\{1, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} \|f_j - \psi \circ \varphi(f_j)\| &= \sup_{x \in X} \|f_j(x) - (\tilde{\psi} \otimes id_{C(X)}) \circ (\tilde{\varphi} \otimes id_{C(X)})(f_j)(x)\| \\ &= \sup_{x \in X} \|f_j(x) \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(f_j(x))\| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Pour tout f dans \mathcal{K} , il existe j dans $\{1, \dots, p\}$ tel que pour tout x dans X , on a $\|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon/3$ et on a

$$\begin{aligned} \|f - \psi \circ \varphi(f)\| &= \|f - f_j + f_j - \psi \circ \varphi(f_j) + \psi \circ \varphi(f_j) - \psi \circ \varphi(f)\| \\ &\leq \|f - f_j\| + \|f_j - \psi \circ \varphi(f_j)\| + \|\psi \circ \varphi(f_j) - \psi \circ \varphi(f)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi \circ \varphi(f_j - f)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|\psi \circ \varphi\| \|f_j - f\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc prouvé que pour tout réel strictement positif et tout sous ensemble compact \mathcal{K} de $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$, il existe un entier n et deux applications $\varphi : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \rightarrow M_n \otimes C(X)$ et $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{O}_2 \otimes C(X)$, $C(X)$ -linéaires continues, complètement positives et contractantes telles que, pour tout f dans \mathcal{K} , on a

$$\|f - \psi \circ \varphi(f)\| < \varepsilon$$

Donc la $C(X)$ -algèbre $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ est $C(X)$ -nucléaire. □

Dans [Blan], l'auteur donne une caractérisation des $C(X)$ -algèbres continues et nucléaires, étendue au cas des $C(X)$ -algèbres continues et exactes par Kirchberg (voire appendice de [Blan]). Il démontre le théorème suivant :

Théorème 4.28 ([Bla97]). *Soit \mathcal{B} une $C(X)$ -algèbre continue et séparable. La C^* -algèbre \mathcal{B} est exacte si et seulement si il existe un plongement $C(X)$ -linéaire de \mathcal{B} dans la $C(X)$ -algèbre $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$.*

On applique alors le théorème 4.28 à la $C(X)$ -algèbre continue et exacte \mathcal{A} et on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.29. *Il existe un homomorphisme injectif de $C(X)$ -algèbres $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$.*

Démonstration. La $C(X)$ -algèbre \mathcal{A} étant continue et exacte, d'après le théorème 4.28, il existe un homomorphisme injectif de $C(X)$ -algèbres $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$. \square

La proposition qui suit permet de plonger la $C(X)$ -algèbre continue $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$:

Proposition 4.30. *Il existe un homomorphisme injectif de $C(X)$ -algèbres de $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$.*

Démonstration. La C^* -algèbre de Cuntz \mathcal{O}_2 étant séparable, il existe, par le théorème de Gelfand-Naimark, un homomorphisme injectif $i : \mathcal{O}_2 \hookrightarrow L(l^2(\mathbb{N}))$. On a alors

$$i \otimes id_{C(X)} : \mathcal{O}_2 \otimes C(X) \hookrightarrow L(l^2(\mathbb{N})) \otimes C(X) \hookrightarrow \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes C(X))$$

$C(X)$ étant une C^* -algèbre σ -unitale, on a $\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}) \otimes C(X)) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$.

Il existe donc un homomorphisme injectif de $C(X)$ -algèbres de $\mathcal{O}_2 \otimes C(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$. \square

Remarque 4.31. Le problème que nous devons étudier, à savoir l'approximation de la représentation régulière de $C_r^*(\mathcal{G})$, peut se résumer grossièrement par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \nu) \otimes l^2(\mathbb{N})) & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \\
 \downarrow \pi & & & & \uparrow \text{?} \\
 C(X) \otimes \mathcal{O}_2 & \xrightarrow{id} & C(X) \otimes \mathcal{O}_2 & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \\
 & \searrow & \uparrow & & \\
 & C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) & & &
 \end{array}$$

4.4. Etude de E_n : projection et application localisante. On utilise la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs compacts obtenus dans la proposition 4.24 pour construire des projections P_{E_n} dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ et une application localisante $l : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par $l(A) = \sum_n E_n A E_n$. L'intérêt d'introduire ces objets est la démonstration de la proposition 4.41.

On rappelle un théorème classique pour les opérateurs sur un module hilbertien, dont l'image est fermée (voir [Lan95] ou [MT05])

Proposition 4.32. *Soit B une C^* -algèbre, \mathcal{E} et \mathcal{F} des B -modules hilbertiens. Soit $t \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ à image fermée, alors on a*

- a) *Le noyau $\ker(t)$ est un sous module de \mathcal{E} qui admet un sous module supplémentaire.*
- b) *L'image $\text{Im}(t)$ est un sous module de \mathcal{F} qui admet un sous module supplémentaire.*
- c) *$t^* \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ a une image fermée.*

Proposition 4.33. *Pour tout entier n dans \mathbb{N} , l'image de l'opérateur E_n est fermée dans $\mathcal{H}_{C(X)}$ et admet un sous module supplémentaire.*

Démonstration. Pour tout entier n , l'opérateur E_n est positif donc $E_n^*E_n = E_n^2$. Par définition, on a $E_n^2 = u_n - u_{n-1}$ et le spectre $\sigma(E_n^2)$ est un ensemble fini, donc $\sigma(E_n^2) \setminus \{0\}$ est fermée. L'opérateur E_n a une image fermée dans $\mathcal{H}_{C(X)}$.

En appliquant la proposition 4.32 à l'opérateur E_n , on en déduit que l'image $\text{Im}(E_n)$ admet un sous module supplémentaire dans $\mathcal{H}_{C(X)}$. \square

Remarque 4.34. On note $P_{E_n} : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}$ la projection associée au sous module $\text{Im}(E_n)$.

Lemme 4.35. *Pour tout n dans \mathbb{N} , il existe un entier N_n tel que l'image de l'opérateur E_n soit incluse dans $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$.*

Démonstration. Pour tout entier n , on a, par construction, $E_n^2 = u_{n+1} - u_n$. Or chaque u_n est une combinaison linéaire convexe d'éléments de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les opérateurs E_n^2 peuvent alors s'écrire sous la forme $E_n^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n$, où λ_n est non nul pour un nombre fini de n et vérifient $\sum_n \lambda_n = 0$. Puisque chaque opérateur E_n^2 est diagonal et de rang fini, il existe un entier positif N_n tel que l'image de E_n soit inclus dans $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$. \square

Remarque 4.36. On pose $\check{\mathcal{H}} := \oplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}(E_n)$. L'espace $\check{\mathcal{H}}$ est muni d'une structure de $C(X)$ -module hilbertien séparable (voir [Lan95] pour la construction générale) : on définit un élément de $\check{\mathcal{H}}$ comme une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où x_n est dans E_n , et vérifiant $\sum_n \langle x_n, x_n \rangle$ convergence dans $C(X)$ et la structure de $C(X)$ -module est évidente (voir [Lan95] pour la construction générale).

Remarque 4.37. On a par construction de $\check{\mathcal{H}}$ un isomorphisme de $C(X)$ -module hilbertien entre $\check{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{H}_{C(X)}$.

Lemme 4.38. *Pour tout n dans \mathbb{N} , il existe N_n entier, tel que $P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$ soit isomorphe au $C(X)$ -module de Hilbert $C(X) \otimes \mathbb{C}^{N_n}$.*

Lemme 4.39. *Soit $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$ l'application qui à tout vecteur ξ de $\mathcal{H}_{C(X)}$ associe le vecteur $V(\xi) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi)$. L'application $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$ est une isométrie.*

Démonstration. Pour tout ξ dans $\mathcal{H}_{C(X)}$, on a

$$\begin{aligned} \|V(\xi)\|^2 &= \|\oplus_{n \in \mathbb{N}} E_n(\xi)\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n(\xi), E_n(\xi) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n^2(\xi), \xi \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n^2(\xi), \xi \right\rangle = \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

Pour tout $\eta = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ de $\check{\mathcal{H}}$ et tout ξ dans $\mathcal{H}_{C(X)}$, on a

$$\begin{aligned} \langle V\xi, \eta \rangle &= \langle \oplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \xi, \oplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E_n \xi, \eta_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \xi, E_n^* \eta_n \rangle \\ &= \left\langle \xi, \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \eta_n \right\rangle = \langle \xi, V^* \eta \rangle \end{aligned}$$

Son adjoint V^* est défini pour tout $\eta = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ de $\check{\mathcal{H}}$ par $V^*(\eta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n(\eta_n)$. \square

L'application $l : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ définie pour tout A dans \mathcal{A} par $l(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n$ est telle que $A - l(A)$ est un opérateur compact, pour tout A dans \mathcal{A} .

Définition 4.40. On pose, pour tout n entier, l'application $\delta_n : \mathcal{A} \rightarrow P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$ définie, pour tout A dans \mathcal{A} , par $\delta_n(A) = P_{E_n} A P_{E_n}$. On dit que $\delta_n(A)$ est la compression de l'opérateur A sur le sous module $P_{E_n}(\mathcal{H}_{C(X)})$.

On pose $\delta = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ l'application sur \mathcal{A} à valeurs dans les opérateurs $\mathcal{L}(\check{\mathcal{H}})$.

Proposition 4.41. Il existe un $C(X)$ -module hilbertien séparable $\check{\mathcal{H}}$, une isométrie $V : \mathcal{H}_{C(X)} \rightarrow \check{\mathcal{H}}$ et une application $C(X)$ -linéaire, complètement positive $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\check{\mathcal{H}})$ tels que pour tout A dans \mathcal{A} , l'opérateur A est une perturbation compacte de $V^* \delta(A) V$.

Démonstration. Le $C(X)$ -module hilbertien séparable $\check{\mathcal{H}}$, l'isométrie V et l'application $C(X)$ -linéaire complètement positive ont été construits auparavant. De plus, on a pour tout entier n et tout A dans \mathcal{A} , la relation $E_n \delta_n(A) E_n = E_n A E_n$, par définition de $\delta_n(A)$. Ainsi on a

$$V^* \delta(A) V = V^* \left(\oplus_{n \in \mathbb{N}} A E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n A E_n = l(A)$$

L'application l étant localisante, alors pour tout A dans \mathcal{A} l'opérateur A est une perturbation compacte de $V^* \delta(A) V$. \square

4.5. Champ de formes vectorielles. Dans cette partie, on s'intéresse aux applications $C(X)$ -linéaires et complètement positives $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$, définies pour tout entier i dans 4.40 : on associe à δ_i une application $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ également $C(X)$ -linéaire et complètement positive qui est un $C(X)$ -état et on montre que δ'_i peut être approchée par des $C(X)$ -états vectoriels définis eux-même à l'aide de la $C(X)$ -représentation fidèle $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ induite par $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$ obtenue au corollaire 4.29. On utilisera les résultats d'approximation d'un état d'une C^* -algèbre par des sommes états vectoriels que l'on peut retrouver dans le livre [Dix96].

On considère la $C(X)$ -représentation fidèle $\pi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)})$, obtenue à partir du plongement $C(X)$ -linéaire $\pi : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes \mathcal{O}_2$. Pour tout i dans \mathbb{N} , on note $\pi_{n_i} := \pi \otimes id : \mathcal{A} \otimes M_{n_i} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}) \otimes M_{n_i}$.

Lemme 4.42. Pour tout i dans \mathbb{N} , l'application $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ est un champ de représentations fidèles.

Démonstration. Soit i un entier. L'application $\pi_{n_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ est évidemment un homomorphisme de $C(X)$ -algèbres. Il s'agit de montrer pour tout x dans X , que l'homomorphisme $\pi_{n_i, x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$ est une représentation fidèle de

la fibre en x . On a, pour tout x dans X et tout A dans $M_{n_i}(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned}\|\pi_{n_i,x}(a_x)\| &= \inf \{ \|\pi_{n_i}(a) - f \cdot \pi_{n_i}(a)\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \inf \{ \|\pi_{n_i}(a - f \cdot a)\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \inf \{ \|a - f \cdot a\|, f \in C_x(X) \} \\ &= \|a_x\|\end{aligned}$$

On a montré, pour tout x dans X , que $\|\pi_{n_i,x}\| = 1$, c'est-à-dire que $\pi_{n_i,x}$ est une représentation fidèle de la fibre $M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$ dans la C^* -algèbre des opérateurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$. Ainsi π_{n_i} est un champ de représentations fidèles. \square

On rappelle un résultat classique pour les états, dans le cadre général des C^* -algèbres dont les détails se trouvent dans [Dix96].

Soit B une C^* -algèbre et H un espace de Hilbert séparable. On considère une représentation fidèle de B dans l'algèbre des opérateurs de H , que l'on note $\pi : B \hookrightarrow L(H)$. Pour tout vecteur ξ de H , on note ω_ξ la forme linéaire continue positive sur B , définie par la représentation π de B et le vecteur ξ , c'est-à-dire l'application linéaire continue positive définie pour tout b dans B , par

$$\omega_\xi(b) = \langle \xi, \pi(b)\xi \rangle$$

Une telle forme linéaire sera appelée forme vectorielle. Si la représentation π est non dégénérée et si le vecteur ξ de H est unitaire, alors la forme linéaire ω_ξ est un état et on parle alors d'état vectoriel sur B .

Théorème 4.43. [Dix96] *Soient H un espace de Hilbert, K l'ensemble des opérateurs compacts sur H , B une sous- C^* -algèbre d'opérateurs de $L(H)$ et ϕ est un état sur B nul sur $B \cap K$. Alors ϕ est limite $*$ -faible d'états vectoriels de B .*

Définition 4.44. [Bla96] *Soit \mathcal{B} une $C(X)$ -algèbre. On appelle champ continu d'états (ou $C(X)$ -état) une application $C(X)$ -linéaire positive φ de \mathcal{B} dans $C(X)$ telle que, pour tout x dans X , l'application $\varphi_x = e_x \circ \varphi$ soit un état sur \mathcal{B}_x .*

Définition 4.45. *Soit \mathcal{B} une $C(X)$ -algèbre continue et $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une $C(X)$ -représentation fidèle dans la $C(X)$ -algèbre des opérateurs sur le $C(X)$ -module hilbertien \mathcal{H} . Un $C(X)$ -état vectoriel $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow C(X)$ est un $C(X)$ -état pour lequel il existe un vecteur ξ dans \mathcal{H} , tel que ξ_x est unitaire dans \mathcal{H}_x pour tout x dans X et vérifiant $\varphi(b) = \langle \xi, \pi(b)\xi \rangle$ pour tout b dans \mathcal{B} .*

Proposition 4.46. *Pour tout i dans \mathbb{N} , l'application $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$ est $C(X)$ -linéaire et complètement positive.*

Démonstration. Soit i un entier. L'application $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i} \otimes C(X)$ est $C(X)$ -linéaire car, pour tout A dans \mathcal{A} , on a $\delta_i(A) = P_{E_i} A P_{E_i}$, où P_{E_i} et A (vu comme opérateurs sur $\mathcal{H}_{C(X)}$) sont $C(X)$ -linéaires.

Pour montrer que δ_i est complètement positive, on montre que pour tout entier n , tout (A_1, \dots, A_n) dans \mathcal{A} et tout (m_1, \dots, m_n) dans $M_{n_i} \otimes C(X)$, on a

$$S_n = \sum_{p,q=1}^n m_p^* \delta_i(A_p^* A_q) m_q \geq 0$$

Or pour tout entier n , tout (A_1, \dots, A_n) dans \mathcal{A} et tout (m_1, \dots, m_n) dans $M_{n_i} \otimes C(X)$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p,q=1}^n m_p^* \delta_i(A_p^* A_q) m_q = \sum_{p,q=1}^n m_p^* (P_{E_i} A_p^* A_q P_{E_i}) m_q = \sum_{p,q=1}^n (A_p P_{E_i} m_p)^* A_q P_{E_i} m_q \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (A_p P_{E_i} m_p)^* A_q P_{E_i} m_q = \sum_{p=1}^n \left((A_p P_{E_i} m_p)^* \left(\sum_{q=1}^n A_q P_{E_i} m_q \right) \right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^n (A_p P_{E_i} m_p) \right)^* \left(\sum_{q=1}^n (A_q P_{E_i} m_q) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Lemme 4.47. *Pour tout entier n et toute $C(X)$ -algèbre A , il existe une correspondance entre les applications $C(X)$ -linéaires complètement positives de A dans $M_n(\mathbb{C}) \otimes C(X)$ et les applications $C(X)$ -linéaires complètement positives de $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$ dans $C(X)$.*

Démonstration. On trouve une preuve dans [Bla06] (II.6.9.11). □

Remarque 4.48. On associe à $\delta_i : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i} \otimes C(X)$, par la correspondance donnée dans le lemme 4.47, $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ l'application $C(X)$ -linéaire complètement positive. On va montrer que $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ est un $C(X)$ -état et de manière analogue au théorème 4.43 sur les états, on prouve, pour tout i dans \mathbb{N} , que le $C(X)$ -état $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ est limite $*$ -faible de $C(X)$ -états vectoriels.

Proposition 4.49. *L'application δ'_i est un champ continu de formes linéaires continues et positives.*

Démonstration. L'application δ'_i est une application $C(X)$ -linéaire (complètement) positive de $M_{n_i}(\mathcal{A})$ dans $C(X)$. De plus pour tout x dans X , l'application $\delta'_{i,x} := e_x \circ \delta'_i$ est une forme linéaire continue et positive sur $M_{n_i}(\mathcal{A})_x \cong M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$. □

Pour prouver que δ'_i est limite $*$ -faible de $C(X)$ -états, on va procéder en deux étapes :

- 1) on fait une étude locale de δ_i en chaque point x de X et on utilise les résultats connus de formes linéaires et continues pour les C^* -algèbres
- 2) on utilise une partition de l'unité pour revenir dans le cadre global des champs continus de formes linéaires

Etape 1) Pour i dans \mathbb{N} et x dans X fixés, on considère la forme linéaire continue et positive définie par $\delta'_{i,x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{C}$, obtenue par la composition $e_x \circ \delta'_i$.

Proposition 4.50. *Pour tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$, il existe $\xi(i, x)$ dans $(\mathcal{H}_{C(X)})_x^{n_i}$ tel que pour tout A dans \mathcal{F} , on ait*

$$|\delta'_{i,x}(A_x) - \omega_{\xi(i,x)}(\pi_{n_i,x}(A_x))| < \varepsilon$$

Démonstration. En utilisant la représentation fidèle $\pi_{n_i, x}$, on considère $M_{n_i}(\mathcal{A}_x)$ comme sous- C^* -algèbre de $\mathcal{L}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$. Quitte à tensoriser par $l^2(\mathbb{N})$, on peut supposer que $\mathcal{A}_x \cap \mathcal{K}((\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x)$ est réduit à l'élément nul. L'application $\delta'_{i, x} : M_{n_i}(\mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue et positive.

En appliquant le théorème 4.43, on en conclut que $\delta'_{i, x}$ est limite $*$ -faible de formes vectorielles. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$, il existe un vecteur $\xi(i, x)$ dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x$ tel que, pour tout A dans \mathcal{F} ,

$$|\delta'_{i, x}(A_x) - \omega_{\xi(i, x)}(\pi_{n_i, x}(A_x))| < \varepsilon$$

□

Remarque 4.51. Puisque $\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i}$ est un $C(X)$ -module de Hilbert, il existe suffisamment de sections au sens où, pour tout $\eta \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_x$, il existe $\tilde{\eta} \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ tel que $\eta = \tilde{\eta}_x$.

Il existe un vecteur $\xi_i^{(x)} \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ tel que $\xi_{i, x}^{(x)} = \xi(i, x)$.

Lemme 4.52. *Pour tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$, il existe un voisinage ouvert $U_{i, x}$ de x dans X , tel que pour tout y dans $U_{i, x}$ et tout A dans \mathcal{F} , on a les inégalités suivantes*

$$\begin{cases} |\delta'_{i, x}(A_x) - \delta'_{i, y}(A_y)| < \varepsilon \\ |\omega_{\xi_{i, x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i, y}^{(x)}}(A_y)| < \varepsilon \end{cases}$$

Démonstration. En effet, la première inégalité résulte du fait que δ'_i est un $C(X)$ -état c'est-à-dire un champ continu d'états sur X . La seconde inégalité s'obtient en considérant la fonction continue $f := \omega_{\xi_i^{(x)}}(A) = \langle \xi_i^{(x)}; \pi_i(A)\xi_i^{(x)} \rangle$ de $C(X)$. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$ un voisinage ouvert V_x de x tel que pour tout $y \in V_x$ on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\langle \xi_i^{(x)}, \pi_{n_i}(A)\xi_i^{(x)} \rangle(x) - \langle \xi_i^{(x)}, \pi_{n_i}(A)\xi_i^{(x)} \rangle(y)| \\ &= |\langle \xi_{i, x}^{(x)}, \pi_{n_i, x}(A_x)\xi_{i, x}^{(x)} \rangle - \langle \xi_{i, y}^{(x)}, \pi_{n_i, y}(A_y)\xi_{i, y}^{(x)} \rangle| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Proposition 4.53. *Pour tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$, il existe un voisinage ouvert $U_{i, x}$ de x dans X , tel que pour tout y dans $U_{i, x}$ et tout A dans \mathcal{F} , on a*

$$|\delta'_{i, y}(A_y) - \omega_{\xi_{i, y}^{(x)}}(A_y)| < \varepsilon$$

Démonstration. On utilise la propriété 4.50 et le lemme 4.52 pour le réel $\varepsilon/3$ et la famille finie \mathcal{F} . On a pour tout A dans \mathcal{F} et pour tout $y \in U_{i, x}$

$$\begin{aligned} D &= |\delta'_{i, y}(A) - \omega_{\xi_{i, y}^{(x)}}(A_y)| \\ &= |\delta'_{i, y}(A_y) - \delta'_{i, x}(A_x) + \delta'_{i, x}(A_x) - \omega_{\xi_{i, x}^{(x)}}(A_x) + \omega_{\xi_{i, x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i, y}^{(x)}}(A_y)| \\ &< |\delta'_{i, y}(A_y) - \delta'_{i, x}(A_x)| + |\delta'_{i, x}(A_x) - \omega_{\xi_{i, x}^{(x)}}(A_x)| + |\omega_{\xi_{i, x}^{(x)}}(A_x) - \omega_{\xi_{i, y}^{(x)}}(A_y)| < 3 \times \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Remarque 4.54. Pour tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$, il existe un vecteur $\xi_i^{(x)}$ dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ et un voisinage ouvert de x , noté $U_{i,x}$, tel que $\xi_{i,y}^{(x)}$ est unitaire dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_y$ pour tout $y \in U_{i,x}$ et vérifiant pour tout y dans $U_{i,x}$ et tout A dans \mathcal{F}

$$|\delta'_{i,y}(A) - \omega_{\xi_i^{(x)}(y)}(A)| < \varepsilon$$

Etape 2) On cherche maintenant à revenir aux champs continus de formes linéaires et continues sur l'espace X . On fixe i un entier dans \mathbb{N} , un réel ε strictement positif et une partie finie \mathcal{F} dans $M_{n_i}(\mathcal{A})$.

Pour l'opérateur $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$, on peut, pour tout x dans X , réitérer la démarche précédente assurant l'existence d'un voisinage ouvert $U_{i,x}$ de x dans X et d'un vecteur $\xi_i^{(x)}$ dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$ tel que pour tout y dans $U_{i,x}$, le vecteur $\xi_{i,y}^{(x)}$ est unitaire dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})_y$. On considère $\tilde{\mathcal{U}}_i = \{U_{i,x}\}_{x \in X}$ le recouvrement ouvert de X .

Remarque 4.55. Comme X est un espace topologique supposé compact, il existe un ensemble fini F_i dans X tel que $\mathcal{U}_i = \{U_{i,\alpha}\}_{\alpha \in F_i}$ soit un recouvrement ouvert fini de X . On note $\{\xi_i^\alpha\}_{\alpha \in F_i}$ les vecteurs de $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})$.

On pose $\{\phi_{i,\alpha}\}_{\alpha \in F_i}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement d'ouverts, où $\phi_{i,\alpha} : X \rightarrow [0, 1]$ fonctions continues à support compact dans $U_{i,\alpha}$ vérifiant l'égalité $\sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(x) = 1$, pour tout x dans X .

Lemme 4.56. *Il existe une application $C(X)$ -linéaire $\omega_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ telle que, pour tout y dans X et tout A dans \mathcal{F} , on a $|\delta'_{i,y}(A) - \omega_i(A)(y)| < \varepsilon$*

Démonstration. On pose $\omega_i := \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha} \omega_{\xi_i^\alpha}$, application $C(X)$ -linéaire de $M_{n_i}(\mathcal{A})$ dans $C(X)$ et on a

$$\begin{aligned} |\delta'_i(A)(y) - \omega_i(A)(y)| &= \left| \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) \delta'_{i,y}(A) - \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) \omega_{\xi_i^\alpha}(A)(y) \right| \\ &< \sum_{\alpha \in F_i} \phi_{i,\alpha}(y) |\delta'_{i,y}(A) - \omega_{\xi_i^\alpha}(A)(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

On considère F_i de la forme $\{1, \dots, m_i\}$ et on note $\xi_i := (\sqrt{\phi_{i,1}} \xi_i^1; \dots; \sqrt{\phi_{i,m_i}} \xi_i^{m_i})$, élément de $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$. En effet, on a

$$\langle \xi_i, \xi_i \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m_i} \langle \sqrt{\phi_{i,\alpha}} \xi_i^\alpha, \sqrt{\phi_{i,\alpha}} \xi_i^\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^{m_i} \phi_{i,\alpha} \langle \xi_i^\alpha, \xi_i^\alpha \rangle \in C(X)$$

Lemme 4.57. *L'application ω_i est un champ continu de formes linéaires positives vectorielles.*

Démonstration. Si on pose $\omega_{\xi_i} := \sum_{\alpha=1}^{m_i} \phi_{i,\alpha} \langle \xi_i^\alpha, \pi_{n_i}(A) \xi_i^\alpha \rangle$, on obtient un $C(X)$ -état vectoriel tel que

$$\omega_{\xi_i} = \omega_i$$

□

Remarque 4.58. Pour tout entier i dans \mathbb{N} , tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(A)$, on a obtenu une approximation de chacun des $C(X)$ -états δ'_i par un $C(X)$ -état vectoriel ω_{ξ_i} , où ξ_i est dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$.

On a montré que pour tout entier i , l'application $\delta'_i : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$ est limite $*$ -faible de $C(X)$ -états c'est-à-dire que pour tout réel ε strictement positif et toute partie finie \mathcal{F} de $M_{n_i}(\mathcal{A})$ il existe un vecteur ξ_i dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ tel que pour tout A dans \mathcal{F}

$$\|\delta'_i(A) - \omega_{\xi_i}(A)\| < \varepsilon$$

4.6. Approximation par factorisation. Pour tout entier i , on a construit le vecteur $\xi_i = (\sqrt{\phi_{i,1}} \xi_i^1; \dots; \sqrt{\phi_{i,m_i}} \xi_i^{m_i})$ dans le $C(X)$ -module hilbertien $\bigoplus_{k=1}^{m_i} \bigoplus_{j=1}^{n_i} \mathcal{H}_{C(X)}$. On adoptera les notations suivantes, en supposant que ξ_i s'écrive sous la forme

$$\xi_i = \left(\begin{pmatrix} \xi_i^{1,1} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_i^{1,2} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \xi_i^{1,m_i} \\ \vdots \\ \xi_i^{n_i,m_i} \end{pmatrix} \right)$$

où chaque $\xi_i^{p,q}$ est un élément de $\mathcal{H}_{C(X)}$.

On note, pour k entier, $\xi_i^{(k)}$ l'élément de $(\mathcal{H}_{C(X)})^{m_i}$, défini par $\xi_i^{(j)} = (\xi_i^{j,1}, \xi_i^{j,2}, \dots, \xi_i^{j,m_i})$.

Définition 4.59. On note, pour tout i entier, $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$, l'application linéaire définie par $V_i(f_1, \dots, f_{n_i}) = \bigoplus_{k=1}^{m_i} \bigoplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{j,k} = \bigoplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{(j)}$

Proposition 4.60. L'application $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ est une application $C(X)$ -linéaire, bornée et possédant un adjoint.

Démonstration. L'application V_i est $C(X)$ -linéaire. Pour montrer qu'elle est bornée on considère (f_1, \dots, f_{n_i}) un élément de $C(X)^{n_i}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|V_i(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 &= \sup_{x \in X} |\langle \bigoplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{(j)} f_j, \bigoplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{(j)} f_j \rangle(x)| \\ &= \sup_{x \in X} \left| \sum_{j=1}^{n_i} |f_j|^2(x) \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle(x) \right| = \sup_{x \in X} \sum_{j=1}^{n_i} |f_j(x)|^2 |g_j(x)|^2 \\ &\leq \|(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 \|(g_1, \dots, g_{n_i})\|^2 \leq \|(f_1, \dots, f_{n_i})\|^2 \end{aligned}$$

L'application $C(X)$ -linéaire V_i est donc bornée.

On montre que $V_i^* : (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i} \rightarrow C(X)^{n_i}$ est définie, pour tout η dans $(\mathcal{H}_X^{n_i})^{m_i}$, par

$$V_i^*(\eta) = (\langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i}$$

En effet, pour tout (f_1, \dots, f_{n_i}) dans $C(X)^{n_i}$ et tout η dans $(\mathcal{H}_X^{n_i})^{m_i}$, on a

$$\begin{aligned} \langle V_i(f_1, \dots, f_{n_i}), \eta \rangle &= \left(\sum_{k=1}^{m_i} \sum_{q=1}^{n_i} \langle \xi_i^{j,k} f_j, \eta^{j,k} f_j \rangle \right) = \sum_{j=1}^{n_i} f_j \sum_{k=1}^{m_i} \langle \xi_i^{j,k}, \eta^{j,k} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} f_j \langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle = \left\langle (f_1, \dots, f_{n_i}), (\langle \xi_i^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} \right\rangle \\ &= \langle (f_1, \dots, f_{n_i}), V_i^*(\eta) \rangle \end{aligned}$$

L'application $C(X)$ -linéaire bornée V_i admet un opérateur adjoint.

De plus pour (f_1, \dots, f_{n_i}) dans $C(X)^{n_i}$, on a

$$\begin{aligned} V_i^* V_i(f_1, \dots, f_{n_i}) &= V_i^* \left(\oplus_{j=1}^{n_i} f_j \xi_i^{(j)} \right) = \left(\langle \oplus_{k=1}^{m_i} \xi_i^{j,k}, f_j \xi_i^{(j)} \rangle \right)_{1 \leq j \leq n_i} \\ &= (f_j \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} = \left(f_j \sum_{k=1}^{m_i} \langle \xi_i^{j,k}, \xi_i^{j,k} \rangle \right)_{1 \leq j \leq n_i} \\ &= (g_1 f_1, \dots, g_{n_i} f_{n_i}) \end{aligned}$$

où chaque g_j est une fonction continue positive non nulle sur X définie, pour tout entier j , par $g_j = \langle \xi_i^{(j)}, \xi_i^{(j)} \rangle$.

L'application $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$ est dans $\mathcal{L}_{C(X)}(C(X)^{n_i}, (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i})$ \square

Remarque 4.61. Par le lemme 4.47 donnant la correspondance entre les applications $C(X)$ -linéaires complètement positives $f : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$ et les applications $C(X)$ -linéaires complètement positives $f : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$, on associe à l'application $\omega_{\xi_i} : M_{n_i}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$, l'application $C(X)$ -linéaire et complètement positive $\tilde{\omega}_{\xi_i} : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$.

Lemme 4.62. *L'application $C(X)$ -linéaire et complètement positive $\tilde{\omega}_{\xi_i} : \mathcal{A} \rightarrow M_{n_i}(C(X))$ est définie pour tout A dans \mathcal{A} par*

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \left(\left\langle \oplus_{k=1}^{m_i} \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^{m_i} (\pi(A) \xi_i^{q,k}) \right\rangle \right)_{1 \leq p, q \leq n_i}$$

Démonstration. L'application étant $C(X)$ -linéaire et complètement positive sur $M_{n_i}(\mathcal{A})$, on peut, pour toute matrice $A = (A_{p,q})$ dans $M_{n_i}(\mathcal{A})$, écrire $\omega_{\xi_i}(A)$ sous la forme $\sum_{p,q=1}^{n_i} \omega_{p,q}(A_{p,q})$. L'application $C(X)$ -linéaire et complètement positive $\tilde{\omega}_{\xi_i}$ est défini, pour tout A dans \mathcal{A} , par la formule

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes \omega_{p,q}(A)$$

Pour toute matrice $A = (A_{p,q})$ dans $M_{n_i}(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi_i}(A) &= \langle \xi_i, (\oplus_{k=1}^m \pi_{n_i}(A)) \xi_i \rangle \\
&= \langle \oplus_{k=1}^m \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \oplus_{k=1}^m (\pi_{n_i}(A) \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^m \langle \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \pi_{n_i}((A_{p,q})) \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k} \rangle \\
&= \sum_{k=1}^m \langle \oplus_{j=1}^{n_i} \xi_i^{j,k}, \oplus_{p=1}^{n_i} (\sum_{q=1}^{n_i} \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k}) \rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^{n_i} \langle \xi_i^{p,k}, \sum_{q=1}^{n_i} \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \rangle \\
&= \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} \langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \rangle = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} \omega_{p,q}(A_{p,q})
\end{aligned}$$

où $\omega_{p,q}(A_{p,q}) = \langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A_{p,q}) \xi_i^{q,k} \rangle$. L'application $C(X)$ -linéaire et complètement positive $\tilde{\omega}_{\xi_i}$ est donc définie par

$$\tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes \langle \oplus_{k=1}^m \xi_i^{p,k}, \oplus_{k=1}^m \pi(A) \xi_i^{q,k} \rangle$$

□

Proposition 4.63. *Pour toute partie finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ il existe un vecteur ξ_i dans $(\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$ tel que pour tout A dans \mathcal{F}*

$$\delta_i(A) - (\langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle)_{1 \leq p, q \leq n_i}$$

est un opérateur compact dans $M_{n_i} \otimes C(X)$; de plus pour un réel strictement positif ε , on peut choisir ξ_i de sorte que, pour tout A dans \mathcal{F} , la norme de cet opérateur compact soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}$.

Démonstration. On pose $\tilde{\mathcal{F}} = \{A \otimes e_{p,q}, A \in \mathcal{F}, 1 \leq p, q \leq n_i\}$ est une partie finie de $M_{n_i}(\mathcal{A})$. Par le travail précédent, il existe un élément $\xi_i \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$ tel que pour tout \tilde{A} dans $\tilde{\mathcal{F}}$, on a

$$\|\delta'_i(\tilde{A}) - \omega_{\xi_i}(\tilde{A})\| < \frac{\varepsilon}{n_i^2 2^i}$$

et pour tout \tilde{A} dans $M_{n_i}(\mathcal{A})$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\delta'_i(\tilde{A}) - \omega_{\xi_i}(\tilde{A}) &= \sum_{p,q=1}^{n_i} \delta_{i,p,q}(\tilde{A}_{p,q}) - \sum_{p,q=1}^{n_i} \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(\tilde{A}_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \\
&= \sum_{p,q=1}^{n_i} \left(\delta_{i,p,q}(\tilde{A}_{p,q}) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(\tilde{A}_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \right)
\end{aligned}$$

Pour tout A dans \mathcal{A} ,

$$\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A) = \sum_{p,q=1}^{n_i} e_{p,q} \otimes (\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle)$$

donc on a

$$\|\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A)\| \leq \sum_{p,q=1}^{n_i} \|\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle\|$$

Pour tout A dans \mathcal{F} et tout p, q dans $\{1, \dots, n_i\}$, la matrice $A \otimes e_{p,q}$ est dans $\tilde{\mathcal{F}}$, on a alors

$$\begin{aligned} M &= \|\delta_{i,p,q}(A) - \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle\| \\ &= \left\| \delta'_i(A \otimes e_{p,q}) - \sum_{p,q} \langle \xi_i^{(p)}, (\pi(A \otimes e_{p,q}) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(q)}) \rangle \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n_i^2 2^i} \end{aligned}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie \mathcal{F} dans \mathcal{A} , on a pour tout A dans \mathcal{F} ,

$$\|\delta_i(A) - \tilde{\omega}_{\xi_i}(A)\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

□

Remarque 4.64. Pour tout $\xi_i \in (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$ et tout A dans \mathcal{A} , on a

$$(\langle \xi_i^{(j)}, (\pi(A) \otimes id_{m_i})(\xi_i^{(j)}) \rangle)_{1 \leq j \leq n_i} = V_i^* ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) V_i$$

Corollaire 4.65. *Pour tout réel strictement positif ε et toute partie finie \mathcal{F} incluse dans \mathcal{A} , il existe V_i dans $\mathcal{L}_{C(X)}(C(X)^{n_i}, (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i})$, telle que pour tout A dans \mathcal{F}*

$$\|\delta_i(A) - V_i^* ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) V_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Approximation : on va maintenant pouvoir donner une approximation de l'application identité de \mathcal{A} ce qui induit alors une approximation de la représentation régulière du groupoïde \mathcal{G} localement compact σ -compact et étale. On note dans la suite $\mathcal{H}_{C(X)}^\infty := \oplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$. On considère $\delta = \oplus_{i \in \mathbb{N}} \delta_i : \mathcal{A} \rightarrow \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_{n_i} \otimes C(X)$ et on pose

$$W : \oplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i} \longrightarrow \oplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^{m_i}$$

défini par $W := \oplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$. On note π_∞ la représentation fidèle définie par

$$\begin{aligned} \pi_\infty : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty) \\ A &\longrightarrow \oplus_{i \in \mathbb{N}} ((\pi(A) \otimes id_{n_i}) \otimes id_{m_i}) \end{aligned}$$

Proposition 4.66. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, on a*

- a) *il existe une application $W : \mathcal{H}_{C(X)}^\infty \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}^\infty$ qui est $C(X)$ -linéaire et adjointable tel que $\delta(A) - W^*(\pi_\infty(A))W$ est compact pour tout A dans \mathcal{F} et vérifie*

$$\|\delta(A) - W^*(\pi_\infty(A))W\| < \varepsilon$$

- b) *il existe une application $\tilde{W} : \mathcal{H}_{C(X)}^\infty \rightarrow \mathcal{H}_{C(X)}^\infty$ $C(X)$ -linéaire et adjointable tel que pour tout A dans \mathcal{F} $A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}$ est compact et vérifie*

$$\|A - \tilde{W}^*(\pi_\infty(A))\tilde{W}\| < \varepsilon$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et \mathcal{F} une partie finie de \mathcal{A} .

a) Pour tout i dans \mathbb{N} , il existe un opérateur borné $V_i : C(X)^{n_i} \rightarrow (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$, tel que pour tout A dans \mathcal{F} , on a $\|\delta_i(A) - V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

On pose $W : \oplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i} \rightarrow \oplus_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{H}_{C(X)}^{n_i})^m$ défini, pour tout $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\oplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i}$ par $W((f_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \oplus_{i \in \mathbb{N}} V_i(f_i)$. W est un opérateur défini sur $\oplus_{i \in \mathbb{N}} C(X)^{n_i}$, qui admet un adjoint $W^* = \oplus_{i \in \mathbb{N}} V_i^*$, donc continu par le théorème du graphe fermé. On a alors

$$\begin{aligned} \|\delta(A) - W^* \pi_\infty(A) W\| &= \|\oplus_{i \in \mathbb{N}} \delta_i(A) - \oplus_{i \in \mathbb{N}} V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \|\delta_i(A) - V_i^* \oplus \pi(A) V_i\| < \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

b) Il existe $V : \rightarrow$ tel que $A - V^* \delta(A) V$ est compact et $\|A - V^* \delta(A) V\| < \varepsilon$ donc en notant $\tilde{W} = VW$, on a $A - \tilde{W}^* (\pi_\infty(A)) \tilde{W}$ est compact et vérifie

$$\|A - \tilde{W}^* (\pi_\infty(A)) \tilde{W}\| \leq \varepsilon$$

□

Théorème 4.67. *Pour toute famille finie \mathcal{F} dans \mathcal{A} et tout réel ε strictement positif, il existe un entier n et des applications $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ et $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$, chacune $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout A dans \mathcal{F}*

$$\|A - \psi \circ \varphi(A)\| < \varepsilon$$

Démonstration. On considère une famille finie \mathcal{F} dans \mathcal{A} et ε un réel strictement positif. Par la proposition précédente, il existe un opérateur W dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$, tel que pour tout A dans \mathcal{F} ,

$$\|A - W^* \pi_\infty(A) W\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Par la $C(X)$ -nucléarité de la $C(X)$ -algèbre $C(X) \otimes \mathcal{O}_2$, on a montré, pour l'ensemble fini \mathcal{F} de \mathcal{A} et ε le réel strictement positif choisis, l'existence d'un entier n et d'applications $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$ et $\tilde{\psi} : C(X) \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$, $C(X)$ -linéaires complètement positives et contractantes vérifiant, pour tout A dans \mathcal{F} ,

$$\|\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)\| < \frac{\varepsilon}{2\|W\|^2}$$

On pose $\varphi := \tilde{\varphi}$ une application de \mathcal{A} dans $M_n \otimes C(X)$ et $\psi := W^* (\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})}) W$ une application de $M_n \otimes C(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$. Ce sont des applications $C(X)$ -linéaires

complètement positives et contractantes et pour tout A dans \mathcal{F} , on a

$$\begin{aligned}
\|A - \psi \circ \varphi(A)\| &= \|A - W^* \pi_\infty(A)W + W^* \pi_\infty(A)W - \psi \circ \varphi(A)\| \\
&\leq \|A - W^* \pi_\infty(A)W\| + \|W^* \pi_\infty(A)W - \psi \circ \varphi(A)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W^* \pi_\infty(A)W - W^*(\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A))W\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W^*(\pi_\infty(A) - (\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A)))W\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|\pi_\infty(A) - (\tilde{\psi} \otimes id_{l^2(\mathbb{N})})(\tilde{\varphi}(A))\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|(\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)) \otimes id_{l^2(\mathbb{N})}\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \|\pi(A) - \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(A)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|W\|^2 \frac{\varepsilon}{2\|W\|^2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

On a montré que pour toute famille finie \mathcal{F} dans \mathcal{A} et tout ε réel strictement positif, il existe un entier n et des applications $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ et $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$, chacune $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout A dans \mathcal{F}

$$\|A - \psi \circ \varphi(A)\| < \varepsilon$$

□

Remarque 4.68. On peut étendre le résultat du théorème 4.67 à des familles \mathcal{F} compactes (et non plus seulement finies) de \mathcal{A} . En effet en considérant \mathcal{F} une famille compacte dans \mathcal{A} et ε un réel strictement positif, on peut pour chaque élément a de \mathcal{F} considérer un voisinage ouvert U_a dans \mathcal{A} de sorte que pour tout a' dans U_a , on a $\|a - a'\| < \varepsilon/3$. On obtient ainsi un recouvrement ouvert de \mathcal{A} duquel on peut extraire un sous recouvrement fini $\mathcal{U} = \{U_{a_i}\}_{i=1}^n$. On considère \mathcal{F}_1 le sous ensemble fini de \mathcal{F} constitué des m éléments a_i , pour i variant de 1 à m . D'après le théorème 4.67, il existe un entier n et des applications $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ et $\psi : M_n \otimes C(X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$, chacune $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante, vérifiant pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$,

$$\|a_i - \psi \circ \varphi(a_i)\| < \varepsilon/3$$

Pour tout a dans \mathcal{F} , il existe a_i dans \mathcal{F}_1 , tel que $\|a - a_i\| < \varepsilon/3$, et on a

$$\begin{aligned}
\|a - \psi \circ \varphi(a)\| &= \|a - a_i + a_i - \psi \circ \varphi(a_i) + \psi \circ \varphi(a_i) - \psi \circ \varphi(a)\| \\
&\leq \|a - a_i\| + \|a_i - \psi \circ \varphi(a_i)\| + \|\psi \circ \varphi(a_i) - \psi \circ \varphi(a)\| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Définition 4.69. Soit \mathcal{G} un groupoïde séparé, localement compact, B une $C_0(X)$ -algèbre et $\phi : C_r^*(\mathcal{G}) \rightarrow B$ une application $C_0(X)$ -linéaire complètement positive. L'application ϕ est dite à support compact s'il existe un sous espace compact K de \mathcal{G} tel que pour toute fonction f dans $C_c(\mathcal{G})$ vérifiant $\text{Supp}(f) \cap K = \emptyset$, on a $\phi(f) = 0$.

Proposition 4.70. *Soit $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ une application $C(X)$ -linéaire et complètement positive, alors pour tout réel ε strictement positif et toute famille finie \mathcal{F} dans \mathcal{A} , il existe une application $C(X)$ -linéaire, complètement positive et à support compact $\varphi' : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ telle que pour tout a dans \mathcal{F} ,*

$$\|\varphi(a) - \varphi'(a)\| < \varepsilon$$

Démonstration. L'application $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ étant $C(X)$ -linéaire et complètement positive, alors par le théorème de Stinespring pour les $C(X)$ -modules de Hilbert, il existe un $C(X)$ -module F_φ , un $*$ -homomorphisme $\pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(F_\varphi)$ et un opérateur v_φ dans $\mathcal{L}(M_n \otimes C(X), F_\varphi)$ tel que pour tout a dans \mathcal{A} , on a $\varphi(a) = v_\varphi^* \pi_\varphi(a) v_\varphi$ c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs e_1, \dots, e_n dans F_φ tels que

$$\varphi(a) = v_\varphi^* \pi_\varphi(a) v_\varphi = [\langle e_i, \pi_\varphi(a) e_j \rangle]$$

On a une représentation fidèle de $\lambda : \mathcal{A}$ dans $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ et pour tout $\eta > 0$, quitte à prendre un multiple de la représentation fidèle λ , il existe des vecteurs ξ_1, \dots, ξ_n dans $L^2(\mathcal{G}, \nu)$ tels que pour tout a dans \mathcal{F}

$$|\langle e_i, \pi_\varphi(a) e_j \rangle - \langle \xi_i, \lambda(a) \xi_j \rangle| < \eta$$

On peut supposer que les fonctions ξ_i sont à support compact et en posant $\varphi'(a) = [\langle \xi_i, \lambda(a) \xi_j \rangle]$, on obtient une application $C(X)$ -linéaire, complètement positive et à support compact $\varphi' : \mathcal{A} \rightarrow M_n \otimes C(X)$ telle que pour tout a dans \mathcal{F} ,

$$\|\varphi(a) - \varphi'(a)\| < \varepsilon$$

□

4.7. Moyennabilité. On considère l'espace produit $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ et pour $i = 1, 2$, on note $p_i : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ la projection sur la i -ième composante. Soit F un sous espace fermé de l'espace $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, on dit que F est (p_1, p_2) -propre si pour tout sous espace compact K de \mathcal{G} , les ensembles $F \cap (K \times \mathcal{G})$ et $F \cap \mathcal{G} \times K$ sont compacts.

Définition 4.71. *On dit que le groupoïde \mathcal{G} a la propriété (W) si pour tout sous espace compact K de \mathcal{G} et pour tout réel ε strictement positif, il existe une fonction $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, bornée, de type positif et à support (p_1, p_2) -propre vérifiant pour tout γ dans K ,*

$$|h(\gamma, \gamma) - 1| < \varepsilon$$

On considère $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, bornée, à support (p_1, p_2) -propre et de type positif. Pour tout γ dans \mathcal{G} , on note h_γ la fonction continue sur \mathcal{G} et à support compact définie par $h_\gamma(\eta) := h(\gamma, \eta)$ pour tout η dans \mathcal{G} .

Lemme 4.72. *Soit $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, bornée, à support (p_1, p_2) -propre et de type positif. L'application $\gamma \rightarrow \lambda(h_\gamma)$ continue sur \mathcal{G} à valeurs dans $C_r^*(\mathcal{G})$ est de type positif.*

Démonstration. On doit prouver que pour tout entier n , tout x dans X , tout $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans \mathcal{G}^x , tout ξ_1, \dots, ξ_n dans $L^2(\mathcal{G})$, on a, pour tout y dans X

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i, \lambda(h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j}) \xi_j \rangle(y) \geq 0$$

On peut supposer, pour tout i dans $N = \{1, \dots, n\}$, que les fonctions ξ_i sont dans $C_c(\mathcal{G})$. On considère $F := \cup_{i=1}^n \text{Supp}(\xi_i|_{\mathcal{G}_y})$ l'ensemble fini de \mathcal{G}_y . On a alors

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i, \lambda(h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j})\xi_j \rangle(y) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_y} \overline{\xi_i(\alpha)} (h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j} \star \xi_j)(\alpha) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_y} \sum_{\beta \in \mathcal{G}^r(\alpha)} \overline{\xi_i(\alpha)} h_{\gamma_i^{-1}\gamma_j}(\alpha\beta^{-1}) \xi_j(\beta) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r \in F} \sum_{r' \in F} \overline{\xi_i(\alpha_r)} h(\gamma_i^{-1}\gamma_j, \alpha_r \alpha_{r'}^{-1}) \xi_j(\alpha_{r'}) \end{aligned}$$

Pour tout i dans $N = \{1, \dots, n\}$ et r dans F , on pose $\lambda_{i,r} := \xi_i(\alpha_r)$, $\sigma_{i,r} := \gamma_i$ et $\tau_{i,r} := \alpha_r^{-1}$, et on a

$$A = \sum_{\substack{i \in N \\ r \in F}} \sum_{\substack{j \in N \\ r' \in F}} \overline{\lambda_{i,r}} \lambda_{j,r'} h(\sigma_{i,r}^{-1} \sigma_{j,r'}, \tau_{i,r}^{-1} \tau_{j,r'}) \geq 0$$

car par définition, l'application $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ est de type positif. \square

On suppose que le groupoïde \mathcal{G} a la propriété (W) . Soit n un entier, on considère le sous espace compact K_n de \mathcal{G} . Il existe une fonction $h : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, bornée, de type positif et à support p_1, p_2 -propre vérifiant pour tout γ dans K_n ,

$$|h(\gamma, \gamma) - 1| < (2n)^{-1}$$

Pour tout β dans \mathcal{G} , on note $h_\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie, pour tout α dans \mathcal{G} , par $h_\beta(\alpha) := h(\beta, \alpha)$ qui est continue et à support compact sur \mathcal{G} . On considère $\mathcal{F} = \{\lambda(h_\beta) : \beta \in K_n\}$ qui est une partie compacte de $C_r^*(\mathcal{G})$. D'après l'approximation par factorisation de la représentation régulière faite dans 4.6, il existe une application $C(X)$ -linéaire, complètement positive et contractante $\phi_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_{C(X)}^\infty)$ telle que pour tout β dans K_n ,

$$\|\phi_n(h_\beta) - id_{\mathcal{A}}(h_\beta)\| < (2n)^{-1}$$

et l'application ϕ_n est à support dans un compact C_n de \mathcal{G} .

Pour tout γ dans \mathcal{G} , on considère U_γ un voisinage ouvert de γ sur lequel les restrictions des applications but et source sont homéomorphismes sur leur image respective. On obtient ainsi un recouvrement d'ouvert $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{G}}$ de l'espace \mathcal{G} duquel on peut extraire un sous recouvrement localement fini $\mathcal{U}' = \{U_{\gamma_i}\}_{i \in I}$, où I est dénombrable. On note $\mathcal{U} := \{U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i}\}_{i \in I}$ le recouvrement ouvert localement fini de la diagonale $\Delta_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. On lui associe une partition de l'unité $\{\psi_i\}_{i \in I}$, où chaque fonction ψ_i est continue, positive et à support compact dans l'ouvert $U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i}$ telles que

$$\chi_{\Delta_{\mathcal{G}}} \leq \sum_{i \in I} \psi_i \leq 1$$

On pose $\psi(\alpha, \beta) = \sum_{i \in I} \psi_i(\alpha, \beta)$ la fonction définie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ continue et à support dans $\cup_{i \in I} (U_{\gamma_i} \times U_{\gamma_i})$. Pour tout γ dans \mathcal{G} , on note $f_\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f_\gamma(\alpha) = \psi(\gamma, \alpha)$ est une fonction continue et à support compact dans $W_\gamma = \cup_{i \in I_\gamma} U_{\gamma_i}$, où $I_\gamma = \{i \in I : \gamma \in U_{\gamma_i}\}$ est une partie finie de I . La restriction des applications but et source à chaque W_γ est un homéomorphisme sur leur image respective.

Comme \mathcal{G} est σ -compact, on suppose qu'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de compacts de \mathcal{G} telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n entier et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{G}$.

Proposition 4.73. *Pour tout n dans \mathbb{N} , il existe une fonction μ_n continue sur $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$, à valeurs réelles, de type positif et à support dans un tube telle que pour tout (γ, η) dans le tube T_{K_n} , on a*

$$|\mu_n(\gamma, \eta) - 1| < 1/n$$

Démonstration. On pose μ_n la fonction définie sur $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$ qui, à tout couple (γ, η) de $\mathcal{G} *_r \mathcal{G}$, associe $\mu_n(\gamma, \eta) = \langle f_\gamma^*, \phi_n(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x)$, où $x = r(\gamma) = r(\eta)$.

Les applications $\gamma \rightarrow f_\gamma$ et $\beta \rightarrow h_\beta$ étant continue sur \mathcal{G} , alors $\mu_n : \mathcal{G} *_r \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue comme composition d'applications continues.

Le support C_n de l'application ϕ_n un sous espace compact de \mathcal{G} et la fonction h est à support (p_1, p_2) -propre donc on a $\text{Supp}(h) \cap \mathcal{G} \times C_n$ est compact. On en déduit alors que $\{\alpha \in \mathcal{G} : \phi_n(h_\alpha) \neq 0\}$ est compact et que la fonction μ_n est à support dans un tube.

On montre que les fonctions μ_n sont de type positif : l'application ϕ_n étant complètement positive, on a alors pour tout entier n , tout $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans \mathbb{C} , pour tout x dans X et tout $(\gamma_p)_{1 \leq p \leq n}$ dans \mathcal{G}^x , on a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,q=1}^n \overline{z_p} z_q \mu_n(\gamma_p, \gamma_q) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \overline{z_p} z_q \langle f_{\gamma_p}^*; \phi_n(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})(f_{\gamma_q}^*) \rangle(x) \\ &= \sum_{p,q=1}^n \langle z_p f_{\gamma_p}^*; \phi_n(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})(z_q f_{\gamma_q}^*) \rangle(x) \end{aligned}$$

or l'application $\gamma \rightarrow \lambda(h_\gamma)$ est de type positif d'après le lemme 4.72 donc la matrice $[\lambda(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})]_{1 \leq p,q \leq n}$ est positive et comme l'application ϕ est complètement positive alors la matrice $[\phi(h_{\gamma_p^{-1}\gamma_q})]_{1 \leq p,q \leq n}$ est positive et la fonction μ_n est donc de type positif pour tout entier n .

Pour prouver que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers un sur les tubes, on a, pour tout couple (γ, η) dans le tube T_{K_n} ,

$$\begin{aligned}
B &= |\mu_n(\gamma, \eta) - 1| = |\langle f_\gamma^*, \phi_n(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x) - 1| \\
&\leq |\langle f_\gamma^*, (\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x)| + |\langle f_\gamma^*, id_{\mathcal{A}}(h_{\gamma^{-1}\eta})(f_\eta^*) \rangle(x) - 1| \\
&\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_x} \overline{f_\gamma^*(\alpha)}(h_{\gamma^{-1}\eta} \star f_\eta^*)(\alpha) - 1 \right| \\
&\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + \left| \overline{f_\gamma^*(\gamma^{-1})} \sum_{\beta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\beta) f_\eta^*(\beta^{-1}) - 1 \right| \\
&\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + |h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\eta) f_\eta^*(\eta^{-1}) - 1| \\
&\leq \|(\phi_n - id_{\mathcal{A}})(h_{\gamma^{-1}\eta})\| + |h_{\gamma^{-1}\eta}(\gamma^{-1}\eta) - 1| \\
&< (2n)^{-1} + (2n)^{-1} \\
&< 1/n
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.74. *Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde étale localement compact σ -compact et séparé ayant un espace des unités X compact, satisfaisant la propriété (W) et la condition (Cont). Si la C^* -algèbre $C_r^*(\mathcal{G})$ est exacte, alors le groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable.*

Démonstration. Pour prouver que groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable, il suffit de montrer que pour tout réel strictement positif ε et tout sous espace compact K de $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$, il existe une fonction $\nu_{\varepsilon, K}$ dans $C_c(\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G})$, continue, de type positif et à support compact telle que pour tout (z, γ) dans K , on a

$$|\nu_{\varepsilon, K}(\gamma, \eta) - 1| < \varepsilon$$

Pour cela on va utiliser la σ -compacité de \mathcal{G} : il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante de compacts de \mathcal{G} telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n entier et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathcal{G}$.

On a montré que pour tout n dans \mathbb{N} , il existe une fonction $\mu_n : \mathcal{G} *_{r,r} \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ de type positif, à support dans le tube $T_{K_{n+1}}$ telle que pour tout couple (γ, η) dans T_{K_n} , on a $|\mu_n(\gamma, \eta) - 1| < n^{-1}$.

On note $p_n : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie pour tout couple (γ, η) dans $\mathcal{G}^{(2)}$ par $p_n(\gamma, \eta) = \mu_n(\gamma, \gamma\eta)$. On remarque que si η est en dehors du compact K_{n+1} alors pour tout γ dans $\mathcal{G}_{r(\eta)}$, on a $p_n(\gamma, \eta) = 0$.

Pour tout γ dans K_n , on considère un voisinage ouvert U_n^γ de γ inclus dans $\overset{\circ}{K}_n$ de sorte que les applications source et but restreintes à U_n^γ soient des homéomorphismes sur leur image respective. On peut alors définir un recouvrement ouvert fini du compact K_n noté $\mathcal{U}_n = \{U_n^j\}_{j=1}^m$. L'application but étant un homéomorphisme de U_n^j sur $r(U_n^j)$ pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$, on note $\sigma_n^j : r(U_n^j) \rightarrow U_n^j$ une section de r . On note $\{\varphi_n^j\}_{j=1}^m$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement \mathcal{U}_n telle que pour tout η dans $\overset{\circ}{K}_n$, on a $\sum_{j=1}^m \varphi_n^j(\eta) = 1$.

Pour tout j dans $\{1, \dots, m\}$, on considère $p_n^j : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout (γ, η) par

$p_n^j(\gamma, \eta) = p_n(\gamma, \eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta)$ qui est à support dans $\mathcal{G} *_{s,r} U_{n,j}$

On pose $\nu_n^j : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout γ par

$$\nu_n^j(\gamma) = \begin{cases} p_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) & \text{si } s(\gamma) \in r(U_n^j) \\ 0 & \text{si } s(\gamma) \notin \cup_{j=1}^m r(U_n^j) \end{cases}$$

On remarque que la fonction ν_n^j est continue, bornée sur \mathcal{G} et pour tout γ hors du compact K_{n+1} on a $\nu_n^j(\gamma) = 0$. Ainsi ν_n^j est dans la C^* -algèbre C_0^s donc dans $C_0(\beta_X \mathcal{G})$.

On pose $\nu_n : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout (γ, η) par

$$\nu_n(\gamma, \eta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \nu_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta), & \text{si } \eta \in K_{n+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction ν_n est dans $C_0(\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G})$ et prolonge par continuité la fonction p_n ; en effet, pour tout (γ, η) dans $\text{Supp}(p_n)$, on a

$$\begin{aligned} p_n(\gamma, \eta) - \nu_n(\gamma, \eta) &= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m \nu_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\ &= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n^j(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\ &= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n(\gamma, \sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\sigma_n^j(s(\gamma))) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\ &= p_n(\gamma, \eta) - \sum_{j=1}^m p_n(\gamma, \eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \varphi_{n,j}^{1/2}(\eta) \\ &= p_n(\gamma, \eta) - p_n(\gamma, \eta) \sum_{j=1}^m \varphi_{n,j}(\eta) = 0 \end{aligned}$$

On montre que le support de chaque fonction ν_n est compact : le support de la fonction ν_n est dans $\beta_X \mathcal{G} *_{\tilde{s},r} K_{n+1}$ et $r(K_{n+1})$ est un sous espace de X compact (par continuité de l'application but). De plus l'application $\tilde{s} : \beta_X \mathcal{G} \rightarrow X$ étant propre, l'espace $\tilde{s}^{-1}(r(K_{n+1}))$ est compact dans $\beta_X \mathcal{G}$. Ainsi le support de ν_n qui est fermé et inclus dans $\tilde{s}^{-1}(r(K_{n+1})) *_{\tilde{s},r} K_{n+1}$ est un compact de $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$. Donc ν_n est à support compact.

Puisque les fonctions μ_n sont de type positif, il est clair que les fonctions ν_n sont également de type positif.

On montre maintenant que la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$: il suffit de considérer le cas particulier $Z * K$ où Z est un compact $\beta_X \mathcal{G}$ et K un compact de \mathcal{G} . On note $\tilde{Z} = Z \cap \mathcal{G}$ le sous espace de \mathcal{G} et on a alors pour tout n

entier

$$\begin{aligned}
\sup_{(z,\eta) \in Z * K} |\nu_n(z, \eta) - 1| &= \sup_{(\gamma, \eta) \in \tilde{Z} * K} |\nu_n(\gamma, \eta) - 1| \\
&= \sup_{(\gamma, \eta) \in \tilde{Z} * K} |\mu_n(\gamma, \gamma\eta) - 1| \\
&= \sup \{ |\mu_n(\gamma, \gamma') - 1| : (\gamma, \gamma') \in \tilde{Z} * \mathcal{G} / \gamma^{-1}\gamma' \in K \}
\end{aligned}$$

et on en déduit que la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers un sur les sous espaces compacts de $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$.

Ainsi le groupoïde $\beta_X \mathcal{G} \rtimes \mathcal{G}$ est moyennable. □

RÉFÉRENCES

- [AD02] Claire Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 10, 4153–4178.
- [ADR00a] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique], vol. 36, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000, With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.
- [ADR00b] ———, *Amenable groupoids*, Monographies de L'Enseignement Mathématique [Monographs of L'Enseignement Mathématique], vol. 36, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000, With a foreword by Georges Skandalis and Appendix B by E. Germain.
- [Arv77] William Arveson, *Notes on extensions of C^* -algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 2, 329–355.
- [BdlH86] Erik Bédos and Pierre de la Harpe, *Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples*, Enseign. Math. (2) **32** (1986), no. 1-2, 139–157.
- [BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [Bla96] Étienne Blanchard, *Déformations de C^* -algèbres de Hopf*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), no. 1, 141–215.
- [Bla97] Etienne Blanchard, *Subtriviality of continuous fields of nuclear C^* -algebras*, J. Reine Angew. Math. **489** (1997), 133–149.
- [Bla06] B. Blackadar, *Operator algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.
- [Dix96] Jacques Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars., Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the second (1969) edition.
- [Eff75] Edward G. Effros, *Property Γ and inner amenability*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 483–486.
- [Hig00] N. Higson, *Bivariant K -theory and the Novikov conjecture*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 3, 563–581.
- [HR00] Nigel Higson and John Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.
- [Kas80] G. G. Kasparov, *Hilbert C^* -modules : theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), no. 1, 133–150.
- [KW99] Eberhard Kirchberg and Simon Wassermann, *Exact groups and continuous bundles of C^* -algebras*, Math. Ann. **315** (1999), no. 2, 169–203.

- [Lan73] Christopher Lance, *On nuclear C^* -algebras*, J. Functional Analysis **12** (1973), 157–176.
- [Lan95] E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, A toolkit for operator algebraists.
- [LP91] Anthony To Ming Lau and Alan L. T. Paterson, *Inner amenable locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991), no. 1, 155–169.
- [Mic56] Ernest Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 361–382.
- [MT05] V. M. Manuilov and E. V. Troitsky, *Hilbert C^* -modules*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 226, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, Translated from the 2001 Russian original by the authors.
- [Oza00] Narutaka Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), no. 8, 691–695.
- [Pat88] Alan L. T. Paterson, *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [Pie84] Jean-Paul Pier, *Amenable locally compact groups*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, A Wiley-Interscience Publication.
- [Run02] Volker Runde, *Lectures on amenability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Sta06] Yves Stalder, *Moyennabilité intérieure et extensions HNN*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 2, 309–323.
- [Tu04] Jean-Louis Tu, *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and K -theory*, Doc. Math. **9** (2004), 565–597.
- [Wil07] Dana P. Williams, *Crossed products of C^* -algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [Yu00] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240.

IVAN LASSAGNE : UNIVERSITE DE LORRAINE.

E-mail address: `ivan.lassagne@math.u-psud.fr`